GRAF IDENTITAS GRUP SIMETRIS

Maria Vianney Any Herawati*
Program Studi Matematika, Jurusan Matematika, Universitas Sanata Dharma
**Email: any@usd.ac.id*

ABSTRACT

Group theory is a branch of mathematics which is called Abstract Algebra. Because of its abstract nature, so students often have difficulty in learning the material in group theory course. The past few years developed a way of describing group with the aim of being able to explained and learned through its picture that is through the graph of group. By definition, the graph consists of vertex (vertices) and edge(s) or can be just consists of vertices only without edge. There are several types the graph of a group, as Cayley graph, commuting graph, coprime graph, and identity graph.of group. Which will be discussed here is the identity graph of a group, especially symmetric group S_n*, that is a group consisting of all permutations of the set {1,2, ..., n}. More specifically in this paper will prove a general formula for calculate number of lines and triangles in the identity graph of all symmetric groups.*

Keywords: group, symmetric group, graf, identity graf.

ABSTRAK

Teori grup adalah salah satu bagian dari ilmu Matematika yang disebut Aljabar Abstrak. Karena sifatnya yang abstrak, maka mahasiswa sering kesulitan dalam mempelajari materi dalam kuliah teori grup. Beberapa tahun belakangan ini dikembangkan cara menggambarkan grup dengan tujuan agar dapat dijelaskan dan dipelajari lewat gambarnya, yaitu graf dari grup tersebut. Menurut definisinya, graf terdiri dari titik dan busur atau bisa berupa titik-titik saja tanpa busur. Ada beberapa macam graf dari suatu grup, seperti graf Cayley, graf commuting, graf coprime maupun graf identitas dari suatu grup. Yang akan dibahas di sini adalah graf identitas dari suatu grup, khususnya grup simetris S_n, yaitu grup yang terdiri atas semua permutasi dari himpunan {1,2, …, n}. Lebih khusus lagi dalam tulisan ini akan dibuktikan rumus umum untuk menghitung banyaknya garis dan segitiga dalam graf identitas dari semua grup simetris.

Kata Kunci: grup, grup simetris, graf, graf identitas.

PENDAHULUAN

Kandasary dan Smarandache (2009) menggambarkan setiap grup berhingga dalam bentuk graf. Mereka menyebut graf tersebut dengan graf identitas, karena yang menjadi kunci utama dalam membentuk graf tersebut ditentukan oleh elemen identitas grup tersebut.

Tahun 2015, Godase mempelajari graf dari beberapa grup berhingga, yaitu grup penjumlahan $\mathbb{Z}_n$ modulo *n*, grup siklis C_n berorde *n* dan grup dihedral D_n berorde 2*n* dan menyebut graf tersebut dengan graf unit.

Tujuan utama dari tulisan ini adalah membuktikan rumus umum untuk menghitung banyaknya garis dan segitiga dalam graf identitas dari semua grup simetris.

METODE PENELITIAN

Metode yang dipakai adalah studi pustaka yang berkaitan dengan pembentukan graf identitas. Selanjutnya dicoba membentuk graf identitas beberapa grup simetris yaitu $\boldsymbol{S_3}$ dan $\boldsymbol{S_4}$, setelah diperoleh graf identitasnya kemudian dihitung banyaknya garis dan segitiga dalam graf identitas dari beberapa grup simetris. Berdasar hasil tersebut dibuat dugaan tentang banyaknya garis dan segitiga dalam grup simetris $\boldsymbol{S_n}$ secara umum lalu dibuktikan rumus umum tersebut.

Notasi dan Definisi

Definisi dan teorema dalam teori grup berikut diambil dari Miller (2013), sedangkan untuk definisi dari teori graf di bawah ini diambil dari Wilson (1996).

Teori Grup

Definisi 1. *Grup* adalah himpunan yang dilengkapi dengan satu operasi biner pada himpunan tersebut yang bersifat assosiatif, mempunyai elemen identitas (biasa dinotasikan dengan *e*) dan setiap elemen dalam himpunan tersebut mempunyai invers di himpunan tersebut. Bila *G* adalah grup dan $a \in G$, maka *orde dari a* adalah bilangan bulat positif *n* sedemikian hingga $a^n = e$. Apabila tidak ada bilangan bulat positif *n* sedemikian hingga $a^n = e$, maka elemen *a* dikatakan *berorde tak berhingga*.
Dan *order grup* adalah banyaknya elemen dalam grup tersebut.

Definisi 2. Misal *A* adalah himpunan tak kosong . Pemetaan $f: A \to B$ dikatakan *injektif* atau *satu-satu* bila dan hanya bil
a $f(a_1) = f(a_{2)} \Rightarrow a_1 = a_{2.}$ Pemetaan $f: A \to B$ dikatakan *surjektif* atau *onto* bila dan hanya bila $f(A) = B$. Pemetaan yang injektif sekaligus surjektif disebut bijeksi. Bijeksi dari *A* ke *A* disebut pula *permutasi dari A*.

Teorema 1. Untuk setiap himpunan tak kosong *A*, himpunan S_A = { $f: A \to A | f$ adalah permutasi dari *A*} adalah grup terhadap operasi komposisi fungsi. Grup S_A disebut *grup simetris dari A*. For each $n \in \mathbb{N}$, the *symmetric group* S_n adalah grup yang terdiri dari semua permutasi dari {1, 2, …, *k*} terhadap operasi komposisi fungsi.

Definisi 3. Misal $k > 1$ dan $\alpha \in S_k$, α adalah *cycle* bila $\alpha = (\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n)$ untuk suatu $1 \le n \le k$ dengan:

- a_i adalah elemen-elemen yang berbeda dari {1, 2, …, *k* }.
- $\alpha(a_i) = a_{i+1}$ untuk $i < n$, $\alpha(a_n) = a_1$, dan
- Elemen-elemen dari {1, 2, …, *k*} yang tidak muncul dalam suatu cycle dipetakan ke elemen itu sendiri.

Suatu cycle disebut *transposisi* bila $\alpha = (\alpha_1\alpha_2)$. Cycles $\alpha = (\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n)$ and $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ dikatakan *saling asing* dalam S_k bila $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} \cap \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\} = \emptyset$.
Jelas bahwa α adalah transposisi bila dan hanya bila $\alpha = \alpha^{-1}$.

Teori Graf

Definisi 4. *Graf G* adalah pasangan himpunan berhingga (*V*, *E*), biasanya ditulis dengan notasi *G*(*V*, *E*), dengan *V* himpunan tak kosong yang elemennya berupa titik dan *E* adalah himpunan yang elemennya berupa busur yang menghubungkan sepasang titik atau menghubungkan titik dengan titik itu sendiri. Busur {*v*,*w*} dikatakan *menghubungkan* titik *v* dan *w*, dan biasanya ditulis dengan *vw*. Dua titik *v* dan *w* dikatakan *bertetangga* bila ada busur *vw* yang menghubungkan kedua titik tersebut, dan titik *v* dan *w* dikatakan *bersisian* dengan busur *vw*. Dua graf G_1 dan G_2 dikatakan *isomorfis* bila ada korespondensi satu-satu antara titik-titik di G_1 dan titik-titik di G_2 sedemikian hingga banyaknya busur yang menghubungkan setiap dua titik di G_1 sama dengan banyaknya busur yang menghubungkan titik-titik yang bersesuaian (merupakan petanya) di G_2. *Derajat* dari suatu titik *v* di *G* adalah banyaknya busur yang bersisian dengan *v*, dan ditulis deg (*v*). *Graf bagian* dari graf *G*(*V*, *E*) adalah graf, yang titiknya anggota dari *V* dan setiap busurnya berada di *E*. *Jalan* adalah barisan berhingga busur yang dinotasikan dengan $v_0 \to v_1 \to \cdots \to v_m$. Banyaknya busur dalam suatu jalan disebut *panjang* jalan tersebut. Jalan yang semua busurnya berbeda disebut *jejak*. Jejak yang semua titiknya berbeda disebut *lintasan*. Lintasan atau jejak dikatakan tertutup bila $v_0 = v_m$. Lintasan yang tertutup disebut *siklus*.

Graf Identitas

Definisi yang berkaitan dengan graf identitas di bawah ini diambil dari Worawiset

(2017).

Misal G adalah grup dengan elemen identitas e, *graf identitas* $\Gamma_G = \Gamma(G,E)$ didefinisikan dengan himpunan titik G dan himpunan busur E yang memenuhi dua syarat:

i. Untuk setiap titik yang berbeda $x, y \in G$, x dan y bertetangga di Γ_G bila dan hanya bila $xy = e$.

ii. Untuk setiap $x \in G$, x dan e bertetangga di Γ_G.

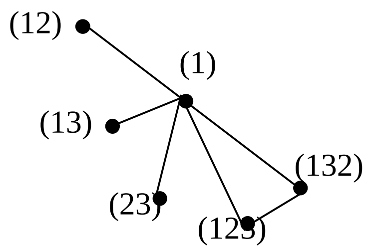
Misal G adalah grup , *garis* dalam graf identitas $\boldsymbol{\Gamma_G}$ adalah busur $\{x,e\}$ yang berderajat satu. Banyaknya garis dalam $\boldsymbol{\Gamma_G}$ dinyatakan dengan *line*(G). *Segitiga* dalam graf identitas $\boldsymbol{\Gamma_G}$ adalah graf bagian yang isomorfis dengan siklus dengan panjang tiga. Banyaknya segitiga dalam graf identitas $\boldsymbol{\Gamma_G}$ dinotasikan dengan *tri*(G).

HASIL DAN PEMBAHASAN

Contoh 1. Untuk grup simetris S_3 = {(1), (12), (13), (23), (123), (132)} tabel Cayleynya ditunjukkan dalam Tabel 1 dan graf identitasnya di Gambar 1. Dari Gambar 1 dapat dilihat bahwa $line(S_3) = 3$ dan $tri(S_3) = 1$, yang memenuhi $line(S_3) + 2\ tri(S_3) = 5 = 6 - 1 = n - 1$, dengan $n = ord(S_3)$.

Tabel 1 Tabel Cayley grup S_3

	(1)	(12)	(23)	(13)	(123)	(132)
(1)	(1)	(12)	(23)	(13)	(123)	(132)
(12)	(12)	(1)	(123)	(132)	(23)	(13)
(23)	(23)	(132)	(1)	(123)	(13)	(12)
(13)	(13)	(123)	(132)	(1)	(12)	(23)
(123)	(123)	(13)	(12)	(23)	(132)	(1)
(132)	(132)	(23)	(13)	(12)	(1)	(123)

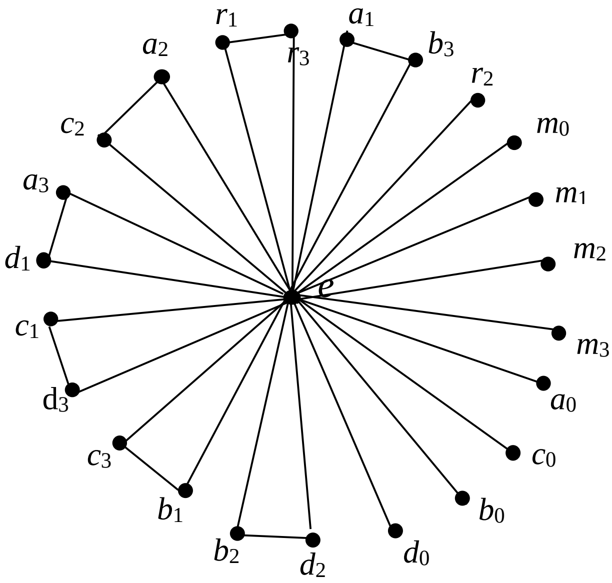


Gambar 1 : Graf identitas dari grup S_3.

Contoh 2. Perhatikan grup simetris S_4 yang 24 elemennya adalah sebagai berikut:

e = (1)	$r_1 = (1234)$	$r_2 = (13)(24)$	$r_3 = (1432)$
$m_0 = (14)(23)$	$m_1 = (24)$	$m_2 = (12)(34)$	$m_3 = (13)$
$a_0 = (12)$	$a_1 = (134)$	$a_2 = (1423)$	$a_3 = (243)$
$b_0 = (23)$	$b_1 = (124)$	$b_2 = (1342)$	$b_3 = (143)$
$c_0 = (34)$	$c_1 = (123)$	c_2 =(1324)	$c_3 = (142)$
$d_0 = (14)$	$d_1 = (234)$	d_2 =(1243)	$d_3 = (132)$

Tabel Cayley dari S_4 cukup besar maka tidak dituliskan di sini . Operasi pada S_4 adalah komposisi dan graf identitas dari S_4 digambar dalam Gambar 2. Dari Gambar 2 terlihat bahwa $line(S_4) = 9$ dan $tri(S_4) = 7$, yang memenuhi $line(S_4) + 2\ tri(S_4) = 23 = 24 - 1 = n - 1$, dengan $n = ord(S_4)$.



Gambar 2. Graf identitas dari grup $\boldsymbol{S_4}$

Teorema 2. Untuk setiap grup G berorder n berlaku

$$line(G) + 2\ tri(G) = n - 1.$$

Bukti : (Worawiset, 2017)

Teorema 3. Misal n adalah bilangan bulat, $n \neq 1$ dan $A = \{\alpha \in S_n | \alpha^2 = e\}$ dengan e = (1) adalah elemen identitas dalam grup simetris S_n. Maka $\alpha \in A$ bila dan hanya bila α adalah transposisi atau α adalah hasilkali transposisi yang saling asing.

Bukti :

(⇒) Misal $\alpha \in A$. Karena $\alpha^2 = e$, maka $\alpha = \alpha^{-1}$ dan α adalah transposisi.

(⇐) Kasus 1: Misal α adalah transposisi dan $\alpha = (\alpha_1\alpha_2)$. Maka $\alpha^2 = (\alpha_1\alpha_2)(\alpha_1\alpha_2) = e$.

Kasus 2: Misal α adalah hasilkali transposisi yang saling asing dan $\alpha = (\alpha_1\alpha_2) \dots (\alpha_{k-1}\alpha_k)$ dengan $\{\alpha_i, \alpha_{i+1}\} \cap \{\alpha_j, \alpha_{j+1}\} = \emptyset$ bila $i \neq j$. Maka $\alpha^2 = (\alpha_1\alpha_2)^2 \dots (\alpha_{k-1}\alpha_k)^2 = e \dots e = e$. Jadi $\alpha \in A$. ■

Teorema 4. Untuk setiap bilangan bulat $n \neq 1$ dan grup simetris $(S_n, \circ)$ berlaku:

i. $line(S_1) = tri(S_1) = 0$

ii. $line(S_2) = 1,\ tri(S_2) = 0$

iii. Untuk $n \geq 3$, $line(S_n) = \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{\binom{n}{2}\binom{n-2}{2} \dots \binom{n-2(j-1)}{2}}{j!}$,

$2tri(S_n) = n - 1 - \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{\binom{n}{2}\binom{n-2}{2} \dots \binom{n-2(j-1)}{2}}{j!}$, dengan $\lfloor n \rfloor$ adalah bilangan bulat terbesar yang kurang dari atau sama dengan n.

Bukti :

i. Karena graf identitas dari S_1 hanya terdiri dari satu titik tanpa busur, maka jelas bahwa
$line(S_1) = tri(S_1) = 0$.

ii. Karena graf identitas dari S_2 terdiri dari dua titik yang bertetangga, maka jelas bahwa $line(S_2) = 1,\ tri(S_2) = 0$.

iii. Banyaknya garis dalam S_n sama dengan banyaknya elemen yang berorde dua di S_n, yang tidak lain berupa $\alpha \in S_n$ sedemikian hingga $\alpha^2 = e\}$. Akibatnya menurut

Teorema 3 elemen tersebut berupa transposisi atau perkalian beberapa transposisi. Sehingga dengan kombinatorika :

- untuk n genap ($n = 2j$), banyaknya elemen berorde dua dalam S_n sama dengan

$$\binom{n}{2} + \binom{n}{2}\binom{n-2}{2}\frac{1}{2!} + \binom{n}{2}\binom{n-2}{2}\binom{n-4}{2}\frac{1}{3!} + \cdots + \binom{n}{2}\binom{n-2}{2}\binom{n-4}{2}\cdots\binom{2}{2}\frac{1}{j!}$$

- untuk n ganjil ($n = 2j + 1$), banyaknya elemen berorde dua dalam S_n sama dengan

$$\binom{n}{2} + \binom{n}{2}\binom{n-2}{2}\frac{1}{2!} + \binom{n}{2}\binom{n-2}{2}\binom{n-4}{2}\frac{1}{3!} + \cdots + \binom{n}{2}\binom{n-2}{2}\binom{n-4}{2}\cdots\binom{3}{2}\frac{1}{j!}$$

Terbukti bahwa banyaknya garis dalam S_n sama dengan

$$line(S_n) = \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}\cdots\binom{n-2(j-1)}{2}}{j!}.$$

Akhirnya dengan Teorema 2, yaitu:

$$line(S_n) + 2\,tri(S_n) = n - 1$$

diperoleh

$$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}\cdots\binom{n-2(j-1)}{2}}{j!} + 2tri(S_n) = n - 1$$

$$\Leftrightarrow 2tri(S_n) = n - 1 - \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}\cdots\binom{n-2(j-1)}{2}}{j!} \qquad \blacksquare$$

KESIMPULAN

Untuk setiap bilangan bulat $n \neq 1$ dan grup simetris $(S_n, \circ)$ berlaku:

i. $line(S_1) = tri(S_1) = 0$
ii. $line(S_2) = 1,\ tri(S_2) = 0$
iii. Untuk $n \geq 3$, $line(S_n) = \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}\cdots\binom{n-2(j-1)}{2}}{j!}$,

$2tri(S_n) = n - 1 - \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}\cdots\binom{n-2(j-1)}{2}}{j!}$, dengan $\lfloor n \rfloor$ adalah bilangan bulat terbesar yang kurang dari atau sama dengan *n*.

DAFTAR PUSTAKA

Kandasamy,W.B.V & Smarandache, F., 2009, *Group as Graphs*, Editura CuArt, 2009.

Godase, A.D., 2015, *Unit Graph of some finite group Z., C., and S.*, International Journal of Universal Science and Technology, 122 – 130. DOI: 10.13140/RG.2.1.4726.3843

Miller, C.C., 2013, *Essentials of Modern Algebra*, Mercury Learning and Information LLC,

Wilson, R.J., 1996, *Introduction to Graph Theory*, fourth edition, Longman Group Ltd.

Worawiset,S., 2017, *Counting Lines and Triangles in The Unit Graphs*, KMITL Sci.Tech.J.Vol.17.No.1, Jan.-Jun.