KONSTRUKSI FAMILI GRAF HAMPIR PLANAR DENGAN ANGKA PERPOTONGAN TERTENTU

Benny Pinontoan[1)]

[1)] **Program Studi Matematika FMIPA Universitas Sam Ratulangi Manado, 95115**

ABSTRAK

Sebuah graf adalah pasangan himpunan tak kosong simpul dan himpunan sisi. Graf dapat digambar pada bidang dengan atau tanpa perpotongan. Angka perpotongan adalah jumlah perpotongan terkecil di antara semua gambar graf pada bidang. Graf dengan angka perpotongan nol disebut planar. Graf memiliki penerapan penting pada desain *Very Large Scale of Integration* (VLSI). Sebuah graf dinamakan perpotongan kritis jika penghapusan sebuah sisi manapun menurunkan angka perpotongannya, sedangkan sebuah graf dinamakan hampir planar jika menghapus salah satu sisinya membuat graf yang sisa menjadi planar. Banyak famili graf perpotongan kritis yang dapat dibentuk dari bagian-bagian kecil yang disebut ubin yang diperkenalkan oleh Pinontoan dan Richter (2003). Pada tahun 2010, Bokal memperkenalkan operasi perkalian zip untuk graf. Dalam artikel ini ditunjukkan sebuah konstruksi dengan menggunakan ubin dan perkalian zip yang jika diberikan bilangan bulat $k \geq 1$, dapat menghasilkan famili tak hingga graf hampir planar dengan angka perpotongan k.

Kata kunci: angka perpotongan, ubin graf, graf hampir planar.

CONSTRUCTION OF INFINITE FAMILIES OF ALMOST PLANAR GRAPH WITH GIVEN CROSSING NUMBER

ABSTRACT

A graph is a pair of a non-empty set of vertices and a set of edges. Graphs can be drawn on the plane with or without crossing of its edges. Crossing number of a graph is the minimal number of crossings among all drawings of the graph on the plane. Graphs with crossing number zero are called planar. Crossing number problems find important applications in the design of layout of Very Large Scale of Integration (VLSI). A graph is crossing-critical if deleting of any of its edge decreases its crossing number. A graph is called almost planar if deleting one edge makes the graph planar. Many infinite sequences of crossing-critical graphs can be made up by gluing small pieces, called tiles introduced by Pinontoan and Richter (2003). In 2010, Bokal introduced the operation zip product of graphs. This paper shows a construction by using tiles and zip product, given an integer $k \geq 1$, to build an infinite family of almost planar graphs having crossing number k.

Keywords**:** Crossing number, tile, almost planar graph.

PENDAHULUAN

Sebuah graf adalah pasangan (N, E) dimana N adalah himpunan tak kosong dari simpul dan E adalah himpunan sisi. Jika $e = uv$ adalah sebuah sisi dari graf G maka simpul u dan simpul v masing-masing adalah ujung dari e, dan kedua simpul itu dinamakan tetangga atau saling damping. Dua sisi yang memiliki simpul bersama dinamakan sisi damping.

Graf dapat digambar pada sebuah bidang dimana simpul disajikan sebagai titik dan sisi sebagai garis yang menghubungkan simpul-simpul yang menjadi ujungnya. Dalam sebuah gambar dari sebuah graf, dua sisi bisa berpotongan atau tidak. Banyaknya perpotongan sisi pada sebuah gambar disebut jumlah perpotongan. *Angka perpotongan* $cr(G)$ dari sebuah graf G adalah jumlah perpotongan terkecil di antara semua gambar dari graf G. Sebuah graf G adalah planar jika $cr(G) = 0$, selain itu disebut nonplanar.

Di antara banyak penerapannya, masalah angka perpotongan menjadi sangat menarik dan penting karena penerapannya dalam optimalisasi daerah chip yang dibutuhkan dalam layout sirkuit *Very Large Scale of Integration* atau *VLSI* (Leighton, 1983 dan Sherwani, 1993). Contoh dari VLSI adalah microprocessor. Peminimalan perpotongan di sini juga untuk mereduksi resiko korsleting.

Sifat struktural masalah angka perpotongan dipelajari melalui graf-graf perpotongan-kritis. Sebuah graf G adalah perpotongan-kritis-k jika $cr(G) \geq k$ dan $cr(G\text{-}e) < k$ untuk setiap sisi e dari G. Lebih menarik lagi jika $cr(G) \geq k$ dan $cr(G\text{-}e) = 0$, untuk setiap sisi e dari G.

Pinontoan dan Richter (2003) melakukan konstruksi famili tak hingga dari graf perpotongan-kritis-k dengan memperkenalkan konsep ubin (*tile*). Ubin adalah graf dengan beberapa ketentuan khusus. Ubin-ubin dapat rangkaikan dengan cara merekatkan satu ubin dengan yang lainnya dan diatur dengan pola linear maupun lingkaran. Rangkaian ubin-ubin dengan pola lingkaran membentuk famili graf tak hingga. Dengan cara ini, angka perpotongan famili graf ini dapat ditentukan.

Bokal (2010) memperkenalkan operasi perkalian zip pada graf. Jika dua graf G_1 dan G_2 masing-masing mempunyai simpul v_1 dan v_2 yang memiliki jumlah tetangga yang sama maka G_1 dan G_2 bisa dilakukan perkalian zip pada v_1 dan v_2.

Sebuah graf G disebut hampir planar jika G memiliki sisi (meskipun tidak setiap sisi) yang penghilangannya menjadikan G planar (Mohar, 2006). Sisi tersebut disebut *pemplanar*.

Pertanyaan yang muncul adalah: adakah konstruksi dengan menggunakan ubin dan perkalian zip, yang menghasilkan famili tak hingga graf hampir planar dengan angka perpotongan tertentu? Dengan kata lain, jika diberikan bilangan bulat $k \geq 1$, bagaimana mengkonstruksi famili tak hingga graf hampir planar dengan angka perpotongan k?

Paper ini menyajikan konstruksi famili tak hingga graf hampir planar dengan angka perpotongan tertentu.

Angka perpotongan Graf dan Graf Hampir Planar

Sebuah *gambar* D(G) dari graf G adalah pemetaan dari graf pada bidang dimana simpul disajikan sebagai titik dan sisi sebagai garis yang menghubungkan simpul-simpul yang menjadi ujungnya. Perpotongan dalam sebuah gambar dari graf adalah sebuah titik pada bidang yang bukan merupakan representasi simpul dimana dua buah garis bertemu.

Gambar yang baik dari sebuah graf memiliki sifat-sifat, yaitu: tidak ada sisi yang memotong dirinya sendiri, dua sisi damping tidak boleh saling memotong, dua sisi tidak boleh saling memotong lebih dari sekali, dan paling banyak dua sisi berpotongan pada satu titik. Banyaknya perpotongan sisi pada sebuah gambar yang baik disebut jumlah perpotongan. *Angka perpotongan* $cr(G)$ dari sebuah graf adalah jumlah perpotongan terkecil diantara semua gambar baik dari graf G. Gambar sebuah graf dengan jumlah perpotongan terkecil disebut *gambar optimal*. Graf G adalah *planar* jika $cr(G) = 0$ dan nonplanar jika $cr(G) \neq 0$. Masalah angka perpotongan diperkenalkan oleh Tutte (1970).

Menentukan angka perpotongan sebuah graf tidaklah mudah. Menurut Garey dan Johnson (1983), masalah angka perpotongan merupakan masalah NP-complete. Kuratowski (1930) menetapkan karakteristik dari graf planar: sebuah graf G adalah planar jika dan hanya jika G tidak mengandung subdevisi dari $K_{3,3}$ or K_5. Biasanya, untuk membuktikan bahwa $cr(G) \leq k$ dilakukan melalui gambar pada bidang sedangkan untuk membuktikan bahwa $cr(G) \geq k$, dilakukan dengan menunjukkan bahwa memang terdapat k pasang sisi yang berpotongan.

Beberapa studi telah dilakukan tentang angka perpotongan dari famili tak hingga dari graf, terutama famili berikut ini. Namun tidak semua angka perpotongan dari famili graf ini sudah diketahui. Hanya beberapa anggota dari famili graf ini yang sudah diketahui. Meskipun demikian, telah disampaikan konjektur dari famili graf tersebut sebagai berikut:

- *Graf lengkap* (*the complete graph*) K_n. Konjekturnya adalah $cr(K_n) = \frac{1}{4}\lfloor n/2\rfloor\lfloor(n-1)/2\rfloor\lfloor(n-2)/2\rfloor\lfloor(n-3)/2\rfloor$. Ini dikenal dengan konjektur Guy untuk graf lengkap (Guy, 1972). Konjektur ini telah dibuktikan untuk $n \leq 12$ oleh Pan dan Richter (2007).

- *Graf bipartite lengkap* (*the complete bipartite graphs*) $K_{m,n}$. Konjekturnya adalah $cr(K_{m,n}) = \lfloor m/2 \rfloor \lfloor (m\text{-}1)/2 \rfloor \lfloor n/2 \rfloor \lfloor (n\text{-}1)/2 \rfloor$. Ini dikenal dengan konjektur Zarankiewicz untuk graf bipartite (Zarankiewicz, 1954). Lomeli dan Salazar (2006) membuktikan untuk $m \leq 6$ dan semua n.
- *Perkalian Cartesius* (*the Cartesian product*) $C_m \times C_n$.
  Konjekturnya adalah $cr(C_m \times C_n) = (m - 2)n$, untuk $3 \leq m \leq n$. Ini telah dibuktikan untuk $n \geq m(m+1)$ oleh Glebsky dan Salazar (2004) dan juga untuk semua $m \leq 7$ oleh Adamsson dan Richter (2004).

Graf G dinamakan perpotongan-kritis-k jika $cr(G) \geq k$ dan $cr(G - e) < k$, untuk tiap sisi e. Graf perpotongan-kritis sangat penting untuk dipelajari guna dapat mengerti sifat-sifat secara struktural dari masalah angka perpotongan. Graf perpotongan-kritis 1 hanyalah subdivisi dari K_5 dan $K_{3,3}$. Širáň (1984) memberikan contoh famili tak hingga graf perpotongan-kritis k tetapi contoh ini menggunakan sisi paralel.

Kochol (1987) memberikan pertama famili tak hingga graf perpotongan-kritis dengan menggunakan graf sederhana dengan angka perpotongan graf ini adalah 2. Ini juga merupakan contoh famili tak hingga graf terkoneksi 3.

Richter and Thomassen (1993) membuktikan bahwa angka perpotongan graf perpotongan-kritis k terbatas. Jika G graf perpotongan-kritis, maka $cr(G) \leq 5k/2 + 16$. Akibatnya bahwa jika G adalah juga graf regular r, maka $r \in \{4, 5\}$. Mereka memberikan contoh famili tak hingga graf perpotongan-kritis 3, terkoneksi 4, dan regular 4.

Salazar (2003) mengamati bahwa dengan argument yang sama, derajat rata-rata dari anggota famili tak hingga graf perpotongan-kritis k, pasti berada pada interval terbuka dan memberikan contoh untuk setiap bilangan rasional pada interval [4, 6) dapat diperoleh sebagai nilai rata-rata dari koleksi tersebut.

Mohar and Dvořák (2009) menunjukkan konstruksi untuk setiap bilangan bulat $k \geq 171$ dari graf perpotongan-kritis k.

Hliněný (2003) membuktikan bahwa graf perpotongan-kritis berbentuk panjang dan sempit dan dapat dibentuk oleh bagian-bagian kecil yang kemudian direkatkan menurut pola linier. Hliněný (2008) kemudian mengkonstruksikan graf hampir planar, yaitu graf yang bisa dijadikan planar dengan hanya menghapus satu sisi dan menunjukkan bahwa derajat rata-rata graf ini bisa bilangan rasional $\in$ [3,2; 6-8/(k+1)).

Pinontoan dan Richter (2003) memperkenalkan konsep ubin dan memperluas cakupan rataan derajat dari anggota famili tak hingga graf sederhana perpotongan-kritis k ke setiap resional dalam interval [3,5; 6).

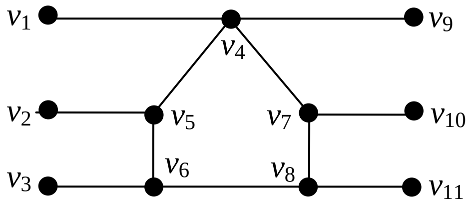
Bokal (2010) menggunakan perluasan ubin dan perkalian zip untuk mengkonstruksi famili tak hingga graf perpotongan-kritis dengan rata-rata deraja pada interval (3 ; 6). Belum lama ini, Hernández-Vélez, Salazar, dan Thomas (2011) memastikan bahwa untuk setiap bilangan bulat positif k, kumpulan graf sederhana perpotongan-kritis dengan rata-rata derajat enam adalah bukan tak hingga.

Sebuah graf G disebut *hampir planar* jika G memiliki sisi (meskipun tidak semua sisi) yang penghilangannya menjadikan G planar (Mohar, 2006). Sisi tersebut disebut *pemplanar*.

Ubin dan Perkalian Zip

Pada tahun 2003, Pinontoan dan Richter memperkenalkan konsep ubin (*tile*). Sebuah ubin $T = (G, L, R)$ adalah graf G terkoneksi dengan dua barisan simpul yang disebut dinding kiri L dan dinding kanan R. *Angka perpotongan ubin*, $tcr(T)$, adalah minimum jumlah perpotongan di antara semua gambar graf G pada persegi $[0, 1] \times [0, 1]$ pada bidang sedemikian rupa sehingga simpul-simpul dari L berada pada $\{0\} \times [0, 1]$ dengan urutan menyusut pada koordinat y dan simpul-simpul dari R berada pada $\{1\} \times [0, 1]$ juga dengan urutan menyusut pada koordinat y.

Gambar 1 memberikan contoh sebuah ubin (G, L, R) dimana $R = (v_1, v_2, v_3)$ dan $L = (v_9, v_{10}, v_{11})$.



Gambar 1. Sebuah ubin.

Sebuah ubin bisa dibalik secara vertikal maupun secara horisontal, dan dapat juga dipilin. Dua ubin dikatakan kompatibel jika dinding-dindingnya bersesuaian. Dua ubin yang kompatibel dapat direkatkan dengan operasi perekatan. Lebih tepatnya, jika $T_1 = (G_1, L_1, R_1)$ dan $T_2 = (G_2, L_2, R_2)$ adalah dua ubin, maka T_1 dikatakan *kompatibel* dengan T_2 jika ada fungsi satu-satu f dari R_1 ke L_2 sehingga jika $v_1, v_2 \in R_1$ dan v_1v_2 adalah sisi di T_1 maka $f(v_1)f(v_2)$ adalah sisi di L_2. Jika $T_1 = (G_1, L_1, R_1)$ kompatibel dengan $T_2 = (G_2, L_2, R_2)$, maka R_1 dan L_2 bisa direkatkan sehingga untuk semua $v \in R_1$, $v = f(v)$ dan untuk semua sisi $v_1v_2 \in T_1$ dimana $v_1, v_2 \in R_1$, $v_1v_2 = f(v_1)f(v_2)$. Proses perekatan ini menghasilkan ubin yang lebih besar $T_1T_2 = (G_1 \cup G_2, L_1, R_2)$.

Ubin adalah planar jika pada gambar ubin di atas bidang tidak terdapat perpotongan. Jika terdapat perpotongan, maka ubin tersebut adalah nonplanar. Ubin-ubin planar bersama ubin yang dipilin bisa direkatkan dalam aransemen lingkaran atau linier sehingga membentuk famili graf dengan angka perpotongan konstan (Pinontoan dan Richter, 2003) sedangkan ubin-ubin nonplanar dengan aransemen yang sama dapat membentuk famili graf dengan angka perpotongan tidak konstan (Pinontoan dan Richter, 2004).

Sebuah ubin T dinamakan swakompatibel jika T kompatibel terhadap dirinya sendiri. Jika swakompatibel, maka T^n diperoleh dengan merekatkan n kopi dari T dalam pola linier. Sedangkan $\mathrm{o}(T^n)$ diperoleh dengan merekatkan dinding kiri dan dinding kanan dari T^n sehingga membentuk lingkaran. Perhatikanlah bahwa T^n adalah ubin sedangkan $\mathrm{o}(T^n)$ adalah graf. Jika ubin pilin $\check{T}$ diperoleh dari $T = (G, L, R)$ dengan membalikkan urutan R, maka $T^{\otimes}(n) = \mathrm{o}(T^n\check{T})$.

Teorema 1. (Pinontoan dan Richter, 2003). *Jika T adalah ubin planar, maka $tcr(\check{T}) = cr(T^{\otimes}(n))$ untuk nilai n yang besar.* □

Lebih lanjut, jika $T = (G, L, R)$ maka ubin *flip horizontal* $T^{\leftrightarrow} = (G, R, L)$, yaitu diperoleh dari T dengan menukarkan dinding kiri dengan dinding kanannya. Sedangkan ubin *flip vertikal* $T^{\downarrow}$ dari ubin T adalah ubin yang diperoleh dari T dengan membalikkan urutan L dan urutan R.

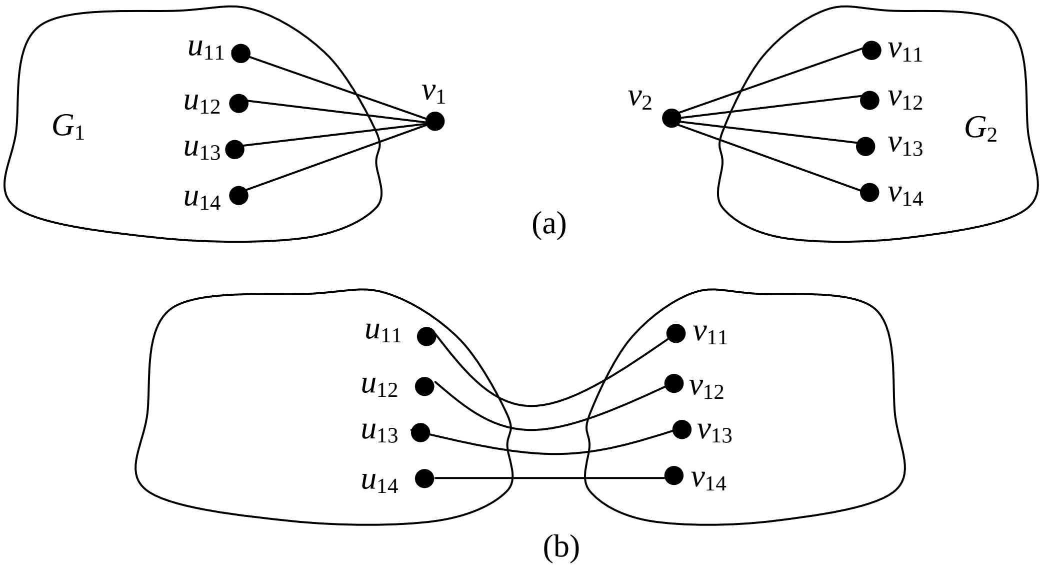
Misalkan T adalah ubin yang umum. Angka perpotongan rata-rata (*average crossing number*) $acr(T)$ dari ubin T didefinisikan sebagai $\lim_{n\to\infty} tcr(T^n)/n$. Telah diketahui bahwa $acr(T)$ dari ubin T bisa merupakan bilangan rasional (Pinontoan, 2006).

Teorema 2. (Pinontoan dan Richter, 2004). *Untuk setiap ubin T, $acr(T)$ ada dan sama dengan $\lim_{n\to\infty} cr(\mathrm{o}(T^n))/n$.* □

Bokal (2010) memperkenalkan teknik aransemen dengan menggunakan perkalian zip (*zip-product*). Perkalian zip adalah sebuah operasi pada graf dan gambarnya dengan kondisi tertentu selingga mempertahankan angka perpotongan dan kekritisan.

Definisi 1 (Perkalian zip, $G_1 \otimes_f G_2(v_1, v_2)$)
Untuk dua graf G_i ($i = 1, 2$) dengan himpunan simpul N_i, dan $v_i \in G_i$ masing-masing dengan derajat yang sama dan fungsi bijeksi f: $N_1 \to N_2$, dinamakan fungsi zip, dari tetangga N_i dari v_i. Perkalian zip $G_1 \otimes_f G_2(v_1, v_2)$ dari G_1 dan G_2 menurut f adalah $(G_1 - v_1) \cup (G_2 - v_2) \cup \{uf(u) \mid u \in N_1\}$. □

Gambar 2 mengilustrasikan perkalian zip G_1 dan G_2 pada v_1 dan v_2 (Gambar 2(a)). Simpul-simpul u_{ij} ($i = 1, 2$ dan $j = 1, 2, 3, 4$) adalah tetangga dari v_i. Fungsi zip $f(u_{1j}) = u_{2j}$, dimana $j = 1, 2, 3, 4$. Hasil dari produksi zip ini adalah $(G_1 - v_1) \cup (G_2 - v_2)$ dengan menambahkan sisi-sisi $u_{1j}u_{2j}$ ($j = 1, 2, 3, 4$) seperti pada Gambar 2(b). Perhatikan bahwa simpul v_1 dan simpul v_2 hilang.



Gambar 2. Perkalian zip graf G_1 dan graf G_2 pada simpul v_1 dan simpul v_2.

Lemma 1. (Bokal, 2010). Untuk $i = 1, 2$, misalkan G_i adalah graf dan D_i adalah gambar optimal dari G_i, serta $v_i \in V(G_i)$ adalah simpul dengan derajat d, dan misalkan f adalah fungsi zip dari D_1 dan D_2 pada v_1 dan v_2. Maka, $cr(G_1 \otimes_f G_2(v_1, v_2)) \leq cr(G_1) + cr(G_2)$.□

Konstruksi Famili Graf Hampir Planar Dengan Angka Perpotongan Tertentu

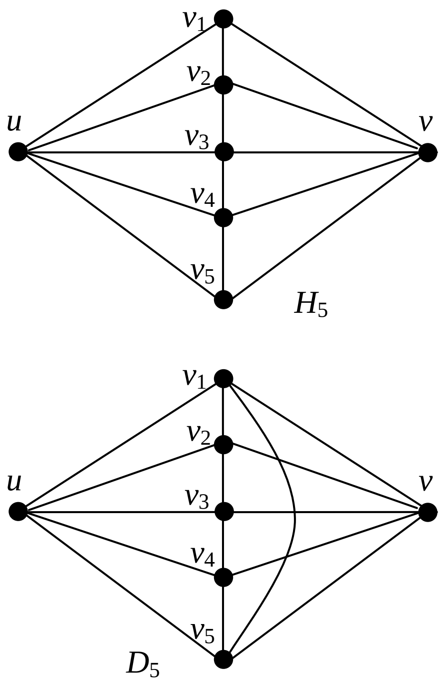
Sebelum mengkonstruksi famili tak hingga graf hampir planar dengan angka perpotongan tertentu, kita akan mendefinisikan beberapa operasi berkaitan dengan perkalian zip dan ubin khusus serta fungsi zip.

Definisi 2 ($\Theta_f T(u, v)$)
Jika T adalah ubin, u dan v adalah simpul-simpul pada T, serta f adalah fungsi zip. Maka $\Theta_f T(u, v)$ adalah perkalian zip dari T ke dirinya sendiri pada u dan v sesuai fungsi f. □

Definisi 3 ($\otimes_f T^n(u, v)$)
Jika T adalah ubin, u dan v adalah simpul-simpul pada T, serta f adalah fungsi zip. Maka $\otimes_f T^n(u, v)$ adalah perkalian zip dari n ($n \geq 2$) salinan ubin T pada salinan u dan v sesuai fungsi f. □

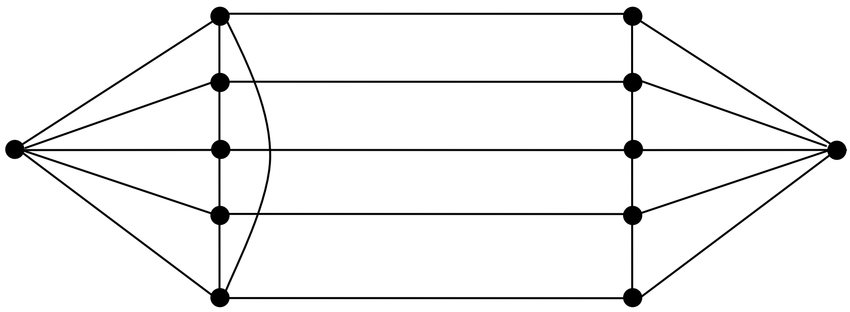
Definisi 4 (Ubin H_m dan ubin D_m).
Ubin H_m ($m \geq 3$) adalah $((V, E), L, R)$ dimana
$V = \{u, v_1, v_2, \ldots, v_m, v\}$,
$E = \{uv_i \mid i = 1, 2, \ldots, m\} \cup \{ vv_i \mid i = 1, 2, \ldots, m\} \cup \{ v_iv_{i+1} \mid i = 1, 2, \ldots, m-1\}$,
$L = \{u\}$, dan $R = \{v\}$.
Sedangkan ubin $D_m (m \geq 3) = H_m \cup \{v_1v_m\}$. □

Gambar 3 menyajikan Ubin H_5 dan D_5.

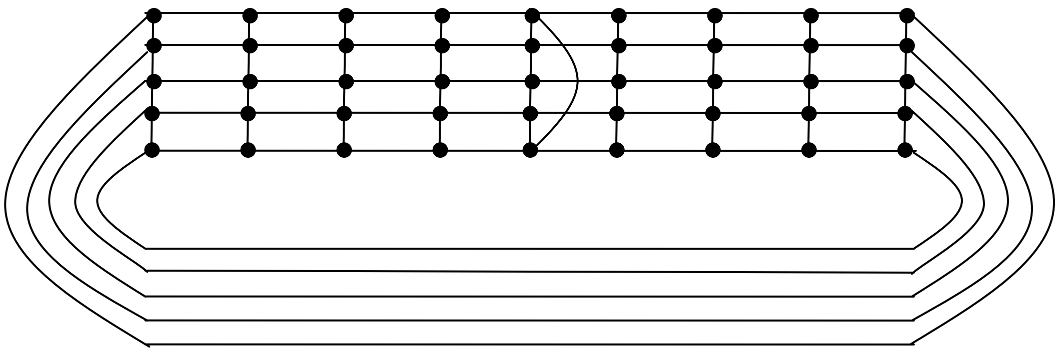


Gambar 3. Ubin H_5 dan ubin D_5.

Definisi 5 (Fungsi zip π).
Misalkan T_1 dan T_2 masing-masing adalah salinan dari ubin H_n atau D_n dan $V_i = \{u_i, v_{i1}, v_{i2}, \ldots, v_{in}, v_i\}$ pada T_i (i = 1, 2) adalah salinan $V = \{u, v_1, v_2, \ldots, v_n, v\}$ pada H_n dan/atau D_n. Maka π adalah fungsi satu-satu dari V_1 ke V_2, dimana $\pi(v_{1j}) = v_{2j}$ (j = 1, 2, ..., n). □
Sebagai contoh, Gambar 4 menampilkan $D_5 \otimes_\pi H_5(u, v)$.



Gambar 4. Perkalian zip ubin D_5 dan H_5.



Gambar 5. Famili graf hampir planar $G_{5,8}$.

Teorema 3.
Diberikan bilangan bulat $k \geq 1$, maka ada famili tak hingga graf hampir planar dengan angka perpotongan k.

***Bukti*:**
Biarkan $k \geq 1$. Pandang ubin-ubin D_m dan H_m ($m \geq 3$) dari Definisi 4 serta fungsi zip π dari Definisi 5. Maka $T_{m,n} = \otimes_\pi H_m{}^n(u, v)$ adalah ubin besar sebagai hasil perkalian zip n salinan dari ubin H_m. Kemudian D_m dikalikan zip dengan $T_{m,n}$, maka kita peroleh ubin besar $S_{m,n} = D_m \otimes_\pi(\otimes_\pi H_m{}^n(u, v))(u, v)$. Dengan menerapkan perkalian zip sendiri pada ubin $S_{m,n}$ pada u dan v dengan fungsi zip π, kita peroleh graf $G_{m,n} = \Theta_\pi(S_{m,n})(u, v)$. Gambar 5 menampilkan $\Theta_\pi(S_{5,8})(u, v)$. $G_{m,n}$ terdiri dari m siklus-(n+1) dan satu siklus-m. Ini bisa diperoleh dari graf perkalian Cartesius $C_m \times C_{n+1}$ dari m siklus-n dengan n+1 siklus-m dengan membuang masing-masing satu dari setiap siklus-m yang menghubungkan dua siklus-(n+1) yang sama. Diketahui bahwa konjektur $cr(C_m \times C_{n+1}) = (m-2)(n+1)$, maka dengan membuang n sisi yang membuat perpotongan, yang tersisa adalah satu sisi yang memotong m-2 sisi dan inilah angka perpotongan $cr(G_{m,n}) = m$-2. Karena $m \geq 3$ dan $k \geq 1$, dan dengan menyatakan $k = m$-2, maka famili tak hingga ini memiliki angka perpotongan k.

Sangatlah mudah dilihat bahwa dengan menghapus sisi yang merupakan salinan v_1v_m (sisi ini yang membedakan D_m dari H_m), maka kita peroleh graf planar. Sehingga sisi v_1v_m adalah sisi pemplanar. □

KESIMPULAN DAN SARAN

Jika diberikan bilangan bulat $k \geq 1$, maka dengan menggunakan ubin dan perkalian zip, dapat dikonstruksi famili tak hingga graf hampir planar dengan angka perpotongan k.

Namun graf yang ditunjukkan di sini bukanlah perpotongan-kritis. Pertanyaan yang timbul adalah: Jika diberikan bilangan bulat $k \geq 1$, adakah famili tak hingga graf hampir planar yang juga sekaligus perpotongan-kritis k? Jika famili seperti itu ada, bisakah itu dikonstruksikan dengan cara seperti ini? Hal ini bisa menjadi bahan penelitian selanjutnya.

DAFTAR PUSTAKA

Adamsson, J., and R.B. Richter. 2004. Arrangements and the Crossing Numbers of $C_m \times C_n$. *J. Combin. Theory* (*B*) **90**, 21-39.

Bokal, D. 2010. Infinite Families of Crossing-Critical Graphs with Prescribed Average Degree and Crossing Number. *J. Graph Theory* **65**, 139-162.

Chartrand, G. and L. Lesniak. 1996. *Graphs & Digraphs*. Chapman & Hall/CRC.

Garey, M.R., and D.S. Johnson. 1983. Crossing Number is NP-Complete. *SIAM J. Algebraic Discrete Methods* **4**, 312-316.

Glebsky, L.Y., and G. Salazar. 2004. The Crossing Number of $C_m \times C_n$ is as Conjectured for $n \geq m(m+1)$. *J. Graph Theory* **47**, 53-72.

Gross, J.L. and T. W. Tucker. 1987. *Topological Graph Theory*. Dover, New York.

Guy, R.K. 1972. Crossing Numbers of Graphs. *Graph Theory and Applications: Proceedings of the Conference at Western Michigan University, Kalamazoo, Mich., May 10-13, 1972* (Ed. Y. Alavi, D. R. Lick, and A. T. White). New York: Springer-Verlag, pp. 111-124.

Hernández-Vélez, C., G. Salazar, and R. Thomas. 2011. Nested Cycles in Large Triangulations and Crossing-Critical Graphs, Submitted.

Hliněný, P. 2003. Crossing Number Critical Graph Have Bounded Path-with. *J. Combin. Theory* (*B*) **88**, 347-367.

Hliněný, P. 2008. New Infinite Families of Almost-Planar Crossing-Critical Graphs. *Electronic J. Combin.* **15**, R102.

Kochol, M. 1987. Construction of Crossing-Critical Graphs. *Discrete Math.* **66**, 311-313.

Kuratowski, K. 1930. Sur le Problème des Courbes Gauches en Topologie. *Fund. Math.* **15**, 271-283.

Leighton, F.T. 1983. *Complexity Issues in VLSI: Optimal layouts for the Shuffe-exchange graph and other networks.* MIT Press.

Mohar, B., and Dvořák. 2009. Crossing-Critical Graphs with Large Maximum Degree, Manuscript.

Mohar, B. 2006. On the Crossing Number of Almost Planar Graphs. *Informatica* **30,** 301-303.

Pan, S. and R.B. Richter. 2007. The Crossing Number of K_{11} is 100. *J. Graph Theory* **56**, 105-112.

Pinontoan, B. 2006. Tile with Rational Average Crossing Number. *J. Indones. Math. Soc.* (*MIHMI*) **12**, 83-87.

Pinontoan, B and R.B. Richter. 2004. Crossing Numbers of Sequences of Graphs IG: General Tiles. *Autralas. J. Combin.* **30**, 197-206.

Pinontoan, B. and R.B. Richter. 2003. Crossing Numbers of Sequences of Graphs II: planar tiles. *J. Graph Theory* **42**, 332-341.

Richter, R.B., and C. Thomassen. 1993. Minimal Graphs with Crossing Number At Least *k*. *J. Combin. Theory* (*B*) **58**, 127-224.

Salazar, G. 2003. Infinite Families of Crossing-Critical Graphs with Given Average Degree. *Discrete Math.* **271**, 343-350.

Sherwani, N.A. 1995. *Algorithm for VLSI physical design automation*. Kluwer Academic Publishers, Massachusetts, USA.

Širáň, J. 1984. Infinite Families of Crossing-Critical Graphs with Given Average Degree. *Discrete Math.* **48**, 129-132.

Tutte, W.T. 1970. Toward a Theory of Crossing Numbers. *J. Combin. Theory* **8**, 45-53.

Wilson, R.J. 1996. *Graph Theory*. Prentice Hall, New York.

Zarankiewicz, K. 1954. On a Problem of P. Turán Concerning Graphs. *Fund. Math.* **41**, 137-145.