PENGGUNAAN TEORI KEKONGRUENAN DALAM MEMPERKECIL RUANG PENCARIAN SOLUSI PERSAMAAN DIOPHANTINE $x^2 = y^3 + 2185$

Vone K. Kadademahe[1)], Mans L. Mananohas[1)], Jullia Titaley[1)]

[1)]**Program Studi Matematika, Fakultas MIPA Universitas Sam Ratulangi**
email : vonekadademahe@gmail.com; mansmananohas@yahoo.com; july_titaley@yahoo.com

ABSTRAK

Pada tahun 2014 Ulas mengajukan sebuah konjektur mengenai solusi bilangan bulat dari persamaan Diophantine tipe Ramanujan-Nagell $x^2 = y^3 + 2185$. Tujuan penelitian ini adalah untuk memperkecil ruang pencarian solusi persamaan Diophantine tipe Ramanujan- Nagell $x^2 = y^3 + 2185$ dengan x sub himpunan bilangan ganjil anggota G_3 dan G_4, dimana $G_3=\{x\in$bilangan ganjil $|x\equiv1 \bmod 8\}$ dan $G_4=\{x\in$bilangan ganjil $|x\equiv7 \bmod 8\}$ dengan metode membagi y menjadi 4 kasus, yaitu : FPB(y,8)=1, FPB(y,8)=2, FPB(y,8)=4, FPB(y,8)=8. Dari hasil penelitian menunjukkan bahwa untuk $x\in G_3$ dengan FPB(y,8)=1, FPB(y,8)=4, FPB(y,8)=8, tidak mempunyai solusi bilangan bulat, sedangkan untuk FPB(y,8)=2 meskipun belum diperoleh kesimpulan akhir tapi ruang pencarian solusi telah berhasil diperkecil untuk x dan y dengan cara melakukan transformasi x=8b+1, y=4a – 2 , apabila a|b atau b|a, maka persamaan Diophantine $x^2 = y^3 + 2185$ hanya mempunyai satu pasang solusi, yaitu : (x,y)=(49,6), dan untuk $x\in G_4$ dengan FPB(y,8)=1, FPB(y,8)=4, FPB(y,8)=8, FPB(y,8)=2 dengan melakukan transformasi x=8q+7, y=4p – 2 untuk p|q atau q|p tidak mempunyai solusi bilangan bulat. Penelitian ini telah berhasil memperkecil ruang untuk x dan y.

Kata kunci : Teorema Euler, Persamaan Diophantine, dan Diophantine Ramanujan - Nagell

THE USE OF CONGRUENCE THEORY TO REDUCING THE FINDING SPACE OF DIOPHANTINE EQUATION $x^2 = y^3 + 2185$ SOLUTION

ABSTRACT

In 2014, Ulas was submitted a conjecture about integer solution of Diophantine Equation of Ramanujan – Nagell type $x^2 = y^3 + 2185$. The purpose of this research is use Euler's Theorem to reduce search solution space of Ramanujan – Nagell type $x^2 = y^3 + 2185$ with x is sub set of odd number in member G_3 dan G_4, where:
$G_3 = \{x \in \text{odd number} \mid x \equiv 1 \bmod 8\}$ and $G_4 = \{x \in \text{odd number} \mid x \equiv 7 \bmod 8\}$
With the method which devide of y into 4 cases, are $\mathrm{GCD}(y,8) = 1$, $\mathrm{GCD}(y,8) = 2$, $\mathrm{GCD}(y,8) = 4$, $\mathrm{GCD}(y,8) = 8$. From the result of this research show that for $x \in G_3$ with $\mathrm{GCD}(y,8) = 1$, $\mathrm{GCD}(y,8) = 4$, $\mathrm{GCD}(y,8) = 8$, there is no solution of integer number, meanwhile for $\mathrm{GCD}(y,8) = 2$ Although the over conclusions have not obtained but has been success minimized the search space solution for x and y with transformation $x = 8b + 1$, $y = 4a - 2$, while $a|b$ or $b|a$, then Diophantine Equation $x^2 = y^3 + 2185$ just has a pair solution is $(x,y) = (49,6)$, and for $x \in G_4$ with $\mathrm{GCD}(y,8) = 1$, $\mathrm{GCD}(y,8) = 4$, $\mathrm{GCD}(y,8) = 8$, $\mathrm{GCD}(y,8) = 2$ with make transformation $x = 8q + 7$, $y = 4p - 2$ for $p|q$ or $q|p$ there is no solution of integer number. The research has been successful to reduce space for x and y.

Keywords : Euler's Theorem, Diophantine Equation and Diophantine Ramanujan - Nagell

PENDAHULUAN

Dalam teori kekongruenan, Leonard Euler menyumbang penemuan penting yaitu Euler mendefinisikan fungsi Euler dan dengan menggunakan fungsi ini, Euler dapat memperluas Teorema kecil Fermat dengan dibentuknya Teorema Euler yang dapat memperkecil ruang pencarian solusi persamaan Diophantine.

Pada penelitian ini digunakan Teorema Euler dan beberapa teori kekongruenan lainnya untuk memperkecil ruang pencarian solusi persamaan Diophantine $x^2 = y^3 + 2185$.

Persamaan Diophantine $x^2 = y^3 + 2185$

Menurut Bauer and Bennett (2002), secara lebih umum persamaan tipe Ramanujan-Nagell yaitu:

$x^2 = Ak^n + B, k \in \mathbb{Z} \geq 2, A, B \in \mathbb{Z}\{0\}$…………………......................… (1)

Dimana $A, B \geq 0$.

Adapun usaha untuk mencari solusi persamaan (1) terus dilakukan, salah satu konjektur terbaru telah dipublikasikan oleh Maciej Ulas pada tahun 2012. Ulas (2012) mengajukan konjektur sebagai berikut:

Konjektur:

Menurut Ulas (2012), Jika (x, y, n), dimana x, y adalah bilangan - bilangan bulat positif dan $n = 3$, solusi dari persamaan Diophantine $x^2 = y^3 + 2185$, yaitu :

$$(x, y) = (49,6), (221,36), (248,39), (1949,156)$$

Fungsi Euler:

Misalkan n adalah bilangan bulat positif. Misalkan $\varphi(n)$ didefinisikan sebagai jumlah berapa bilangan bulat positif yang kurang dari atau sama dengan n dan relatif prima terhadap n (Fraleigh, 2000).

Teorema Euler:

Jika a adalah sebuah bilangan bulat relatif prima terhadap n , maka $a^{\varphi(n)} - 1$ habis dibagi oleh n . Hal ini kongruen dengan $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \ (mod\ n)$ (Fraleigh, 2000).

METODE PENELITIAN

Waktu dan Tempat

Penelitian ini dilakukan di Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Sam Ratulangi. Waktu pelaksanaan penelitian ini di mulai pada bulan Mei sampai pada bulan Juni 2018.

Metode

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah dengan melakukan sumber literature dan menggunakan teori kekongruenan untuk memperkecil ruang solusi dari persamaan Diophantine $x^2 = y^3 + 2185$ dengan x merupakan sub himpunan ganjil, seperti berikut :

1. $G_3 = \{x \in bil.ganjil \mid x \equiv 1\ mod\ 8\ \}$. Pada kasus ini, ruang pencarian solusi persamaan dibagi menjadi 4 ruang, yaitu`:
2. $G_4 = \{x \in bil.ganjil \mid x \equiv 7\ mod\ 8\ \}$.

Pada kasus ini, ruang pencarian solusi persamaan dibagi menjadi 4 ruang, yaitu:

FPB $(y, 8) = 1$	FPB $(y, 8) = 4$
FPB $(y, 8) = 2$	FPB $(y, 8) = 8$

HASIL DAN PEMBAHASAN

Beberapa hasil penelitian Persamaan Diophantine $x^2 = y^3 + 2185$ dengan x diambil pada beberapa sub himpunan bilangan ganjil yaitu G_3 dan G_4.

Untuk kasus $x \in G_3$ dibagi menjadi 4 kasus, yaitu :

Proposisi 4.1 (kasus 1. Untuk FPB$(y, 8) = 1$)

Misalkan $x, y \in \mathbb{Z}^+$, untuk $x \equiv 1\ mod\ 8$. Persamaan Diophantine $x^2 = y^3 + 2185$ tidak mempunyai solusi bilangan bulat saat FPB $(y, 8) = 1$.

Bukti :

Dengan menggunakan pembuktian kontradiksi, misalkan untuk $x \equiv 1\ moda\ 8$. Persamaan Diophantine $x^2 = y^3 + 2185$ akan mempunyai solusi bilangan bulat saat FPB $(y, 8) = 1$.

FPB $(y, 8) = 1$	FPB $(y, 8) = 4$
FPB $(y, 8) = 2$	FPB $(y, 8) = 8$

Persamaan Diophantine $x^2 = y^3 + 2185$ dan nilai $x \equiv 1\ mod\ 8$. Dengan menggunakan Teorema Euler dapat diperoleh: $\varphi(8) = 4$.

Dengan FPB $(y, 8) = 1$, dapat dibentuk persamaan:

$y^4 \equiv 1\ mod\ 8$ ……………….. (2)

Untuk $x^2 = y^3 + 2185$, $x \equiv 1\ mod\ 8$ ekuivalen dengan :

$x^2 . y = y^4 + 2185y$

Selanjutnya dengan menggunakan persamaan (2) maka didapat persamaan
$y \equiv 1 + y(mod\ 8)$
Ini berarti $0 \equiv 1\ mod\ 8$. kontradiksi
∴ jadi dapat disimpulkan untuk persamaan ini untuk y yang memenuhi FPB $(y, 8) = 1$ tidak memiliki solusi.■

Proposisi 4.2 (kasus 2. Untuk FPB$(y, 8) = 4$)

Misalkan $x, y \in \mathbb{Z}^+$, untuk $x \equiv 1\ mod\ 8$. Persamaan Diophantine $x^2 = y^3 + 2185$ tidak mempunyai solusi bilangan bulat saat FPB $(y, 8) = 4$.

Bukti :

Dengan menggunakan pembuktian kontradiksi, misalkan untuk $x \equiv 1\ mod\ 8$. Persamaan Diophantine $x^2 = y^3 + 2185$ akan mempunyai solusi bilangan bulat saat FPB $(y, 8) = 4$.

$x^2 = y^3 + 2185$, $x \equiv 1\ (mod\ 8)$, FPB $(y, 8) = 4$
$y = 4a$, a adalah bilangan ganjil.
$x = 8b + 1$
$(8b + 1)^2 = 64a^3 + 2185$
$(64b^2 + 16b + 1) = 64a^3 + 2185$
$(64b^2 + 16b - 64a^3) = 2184$
Akan tetapi perhatikan ruas kiri habis dibagi 16, sementara $16 \nmid 2184$. Kontradiksi.
∴ Tidak ada solusi pada G_3 dengan y sedemikian sehingga FPB $(y, 8) = 4$.■

Proposisi 4.3 (kasus 3. Untuk FPB$(y, 8) = 8$)

Misalkan $x, y \in \mathbb{Z}^+$, untuk $x \equiv 1\ mod\ 8$.

Persamaan Diophantine $x^2 = y^3 + 2185$ tidak mempunyai solusi bilangan bulat saat FPB $(y, 8) = 8$

Bukti :

Dengan menggunakan pembuktian kontradiksi, misalkan untuk $x \equiv 1\ mod\ 8$. Persamaan Diophantine $x^2 = y^3 + 2185$ akan mempunyai solusi bilangan bulat saat FPB $(y, 8) = 8$.

$x^2 = y^3 + 2185$, $x \equiv 1\ (mod\ 8)$,
FPB $(y, 8) = 8$
$y = 8a$, a adalah bilangan ganjil.
$x = 8b + 1$
$(8b + 1)^2 = 512a^3 + 2185$
$(64b^2 + 16b - 512a^3) = 2184$
Akan tetapi perhatikan ruas kiri habis dibagi 16, sementara $16 \nmid 2184$. Kontradiksi.
∴ Tidak ada solusi pada G_3 dengan y sedemikian sehingga FPB $(y, 8) = 8$.■

Proposisi 4.4 (kasus 4. Untuk FPB$(y, 8) = 2$)

Misalkan $x = 8b + 1, y = 4a - 2$, dengan $a, b \in \mathbb{Z}^+$, yang memenuhi $a|b$ atau $b|a$ pada persamaan Diophantine $x^2 = y^3 + 2185$ hanya mempunyai satu solusi bilangan bulat positif, yaitu : $(x, y) = (49{,}6)$.

Bukti :

persamaan Diophantine $x^2 = y^3 + 2185$ dengan $x \equiv 1\ (mod\ 8)$ dapat ditulis $x = 8b + 1$, FPB $(y, 8) = 2$ dapat ditulis $y = 4a - 2$Dengan mensubstitusikan nilai x dan y diperoleh :
$(8b + 1)^2 = (4a - 2)^3 + 2185$
$\frac{(64b^2+16b-64a^3+96a^2-48a)}{16} = \frac{2176}{16}$
$4b^2 + b - 4a^3 + 6a^2 - 3a = 136$ .... (3)
Untuk persamaan (3), nilai a dan b dibagi atas 2 kasus
(i) Jika $a|b$ maka $a|136$, artinya a merupakan faktor dari 136.
$a = \{1,2,4,8,17,34,68,136\}$
Untuk $a = 1$, $1|b$ artinya $b = p$, dengan $p \in \mathbb{Z}$. Perhatikan bahwa :
$4(ap)^2 + ap - 4a^3 + 6a^2 - 3a = 136$
$4p^2 + p - 137 = 0$
Dengan menggunakan rumus ABC, diperoleh :

$$p_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(4)(-137)}}{2 \cdot 4}$$
$$= \frac{-1 \pm \sqrt{2193}}{8} = \frac{-1 \pm 46{,}83}{8}$$
$$p_1 = -5.98 \text{ atau } p_2 = 5.73$$

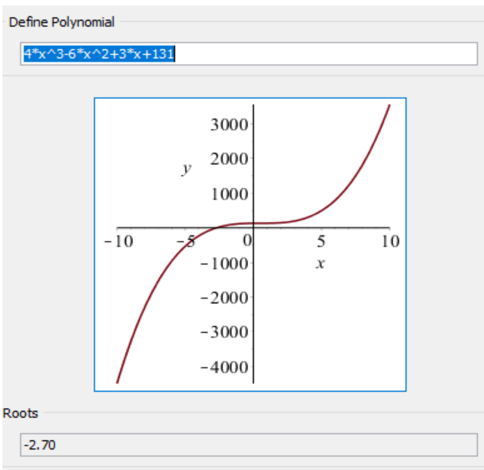
Dapat dilihat untuk $a = 1$, nilai $b \notin \mathbb{Z}$.
Merujuk dari penyelesaian diatas, untuk nilai a dan b yang lainnya dapat disajikan dalam Tabel 1.

Tabel 1. Solusi persamaan 3

a	b_1	b_2
1	−5.98	5.73
2	−6,25	6
4	−8,90	8.65
8	−21,48	21,23
17	−67,40	67,15
34	−194.11	193.86
68	−554.73	554.48
136	−1577.42	1577.04

Dari Tabel 1, dapat diihat $a|b$ memiliki solusi bilangan bulat dari persamaan (3) hanya disaat $a = 2$ maka $b = 6$, maka salah satu solusi Diophantine Ramanujan - Nagell $x^2 = y^3 + 2185$ adalah $(x, y) = (49,6)$.

(ii) Jika $b|a$ maka $b|136$, artinya b merupakan faktor dari 136.
$b = \{1,2,4,8,17,34,68,136\}$,
Untuk $b = 1$, $1|a$ artinya $a = p$, dengan $p \in \mathbb{Z}$. Perhatikan bahwa :
$4(b)^2 + b - 4a^3 + 6a^2 - 3a = 136$
$4p^3 - 6p^2 + 3p + 131 = 0$ ……. (4)
Untuk menyelesaikan persamaan (4) digunakan *software* dan didapatkan *output* seperti berikut :



Gambar 1. Solusi dan grafik persamaan 4.

Untuk persamaan (4) dapat dilihat pada grafik di gambar 1, hanya terdapat satu titik potong pada sumbu p yang artinya hanya terdapat satu solusi untuk persamaan (4) disetiap nilai $b|a$ dan bukan merupakan bilangan-bilangan bulat. Untuk solusi persamaan yang lainnya dapat dilihat pada Tabel 2.

Tabel 2. Solusi persamaan 3.

b	a_1	a_2	a_3
1	−2.70347929	−	−
2	−1.29711569	−	−
4	−0.51939209	−	−
8	0.45883286	−	−
17	0.40443155	−	−
34	0.32108695	−	−
68	0.252048	−	−
136	0.198	−	−

Dari Tabel 2 dapat dilihat, untuk setiap $b|a$ pada persamaan (3) tidak terdapat solusi bilangan bulat.
∴ jadi untuk $x = 8b + 1, y = 4a - 2$, dengan $a, b \in \mathbb{Z}^+$, yang memenuhi $a|b$ atau $b|a$ pada persamaan Diophantine $x^2 = y^3 + 2185$ terbukti hanya mempunyai satu solusi bilangan bulat positif, yaitu : $(x, y) = (49,6)$.■

Untuk kasus $x \in G_4$dibagi menjadi 4 kasus, yaitu :

Proposisi 4.5 (kasus 1. Untuk FPB$(y, 8) = 1$)
Misalkan $x, y \in \mathbb{Z}^+$, untuk $x \equiv 7 \; mod \; 8$. Persamaan Diophantine $x^2 = y^3 + 2185$ tidak mempunyai solusi bilangan bulat saat FPB $(y, 8) = 1$.

Bukti :

Dengan menggunakan pembuktian kontradiksi, misalkan untuk $x \equiv 7 \; mod \; 8$. Persamaan Diophantine $x^2 = y^3 + 2185$ akan mempunyai solusi bilangan bulat saat FPB $(y, 8) = 1$.
$x^2 = y^3 + 2185$
$x \equiv 7 \; mod \; 8$
$\varphi(8) = 4$
Diberikan FPB $(y, 8) = 1$, maka kita memiliki
$y^4 \equiv 1 \; mod \; 8$ ……………… (5)
Untuk $x^2 = y^3 + 2185$, $x \equiv 7 \; mod \; 8$ ekuivalen dengan :
$x^2.y = y^4 + 2185y$
Selanjutnya dengan menggunakan persamaan (5) maka didapat persamaan
$y \equiv 1 + y(mod \; 8)$
Ini berarti $0 \equiv 1 \; mod \; 8$ kontradiksi

∴ jadi dapat disimpulkan untuk persamaan ini untuk y yang memenuhi FPB $(y, 8) = 1$ tidak memiliki solusi.■

Proposisi 4.6 (kasus 2. Untuk FPB$(y, 8) = 4$)
Misalkan $x, y \in \mathbb{Z}^+$, untuk $x \equiv 7 \, mod \, 8$. Persamaan Diophantine $x^2 = y^3 + 2185$ tidak mempunyai solusi bilangan bulat saat FPB $(y, 8) = 4$.

Bukti :

Dengan menggunakan pembuktian kontradiksi, misalkan untuk $x \equiv 7 \, mod \, 8$. Persamaan Diophantine $x^2 = y^3 + 2185$ akan mempunyai solusi bilangan bulat saat FPB $(y, 8) = 4$.
$x^2 = y^3 + 2185$, $x \equiv 7 \ (mod \ 8)$, FPB $(y, 8) = 4$
$y = 4p$, p adalah bilangan ganjil.
$x = 8q + 7$
$(8q + 7)^2 = 64p^3 + 2185$
$(64q^2 + 112q + 49) = 64p^3 + 2185$
$(64q^2 + 112q - 64p^3) = 2136$
Akan tetapi perhatikan ruas kiri habis dibagi 16, sementara $16 \nmid 2136$. Kontradiksi.
∴ tidak ada solusi pada G_3 dengan y sedemikian sehingga FPB $(y, 8) = 4$.■

Proposisi 4.7 (kasus 3. Untuk FPB$(y, 8) = 8$)
Misalkan $x, y \in \mathbb{Z}^+$, untuk $x \equiv 7 \, mod \, 8$. Persamaan Diophantine $x^2 = y^3 + 2185$ tidak mempunyai solusi bilangan bulat saat FPB $(y, 8) = 8$.

Bukti :

Dengan menggunakan pembuktian kontradiksi, misalkan untuk $x \equiv 7 \, mod \, 8$. Persamaan Diophantine $x^2 = y^3 + 2185$ akan mempunyai solusi bilangan bulat saat FPB $(y, 8) = 8$.
$x^2 = y^3 + 2185, x \equiv 7 \ (mod \ 8)$, FPB $(y, 8) = 8$
$y = 8p$, p adalah bilangan ganjil.
$x = 8q + 7$
$(8q + 7)^2 = 512p^3 + 2185$
$(64q^2 + 112q + 49) = 512p^3 + 2185$
$(64q^2 + 112q - 512p^3) = 2136$
Akan tetapi perhatikan ruas kiri habis dibagi 16, sementara $16 \nmid 2136$. Kontradiksi.
∴ tidak ada solusi pada G_3 dengan y sedemikian sehingga FPB $(y, 8) = 8$.■

Proposisi 4.8 (kasus 4. Untuk FPB$(y, 8) = 2$)
Misalkan $x = 8q + 7, y = 4p - 2$, dengan $a, b \in \mathbb{Z}^+$, yang memenuhi $a|b$ atau $b|a$ pada persamaan Diophantine $x^2 = y^3 + 2185$ tidak mempunyai solusi bilangan bulat saat FPB $(y, 8) = 2$.

Bukti :

$x^2 = y^3 + 2185$ dengan $x \equiv 7 \ (mod \ 8)$ dapat ditulis $x = 8q + 7$ dan FPB $(y, 8) = 2$ dapat dituliskan $y = 4p - 2$, dengan mensubstitusikan nilai x dan y diperoleh :

$$(8q + 7)^2 = (4p - 2)^3 + 2185$$
$$(64q^2 + 112q - 64p^3 + 96p^2 - 48p) = 2128$$
$$\frac{(64q^2 + 112q - 64p^3 + 96p^2 - 48p)}{16} = \frac{2128}{16}$$
$$(4q^2 + 7q - 4p^3 + 6p^2 - 3p) = 133 \ldots\ldots \quad (6)$$

Untuk persamaan (6), nilai p dan q dibagi atas 2 kasus
(i) Jika $p|q$ maka $p|133$, artinya p merupakan faktor dari 133.
$p = \{1, 7, 19, 133\}$,
Untuk $p = 1$, $1|q$ artinya $q = k$, dengan $k \in \mathbb{Z}$. Perhatikan bahwa :
$(4q^2 + 7q - 4p^3 + 6p^2 - 3p) = 133$
$4k^2 + 7k - 134 = 0$
Dengan menggunakan rumus ABC, diperoleh :

$$k_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4(4)(-134)}}{2 \cdot 4}$$
$$= \frac{-7 \pm \sqrt{2193}}{8} = \frac{-7 \pm 46{,}83}{8}$$
$$k_1 = -6.73 \text{ atau } k_2 = 4.98$$

Dapat dilihat untuk $p = 1$, nilai $q \notin \mathbb{Z}$.
Merujuk dari penyelesaian diatas, untuk nilai a dan b yang lainnya dapat disajikan dalam Tabel 3.

Tabel 3. Solusi persamaan 6.

p	q_1	q_2
1	−6.73	4.98
7	−18.45	16.70
19	−80.66	78.91
133	−1526.08	1524.33

Dari Tabel 3, dapat diihat bahwa untuk $p|q$, tidak terdapat solusi bilangan bulat dari persamaan (6).

(ii) Jika $q|p$ maka $q|133$, artinya q merupakan faktor dari 133.

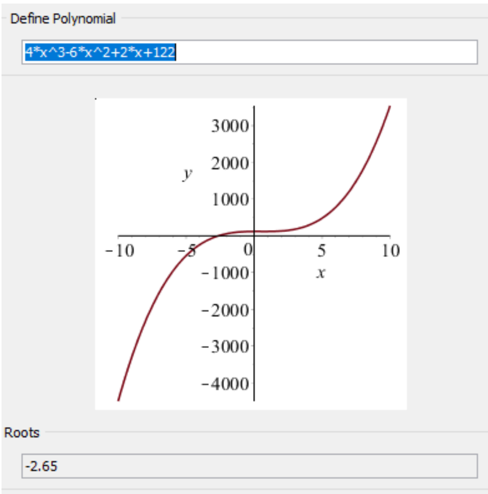
$q = \{1,7,19,133\}$,

Untuk $q = 1$, $1|p$ artinya $p = 1k = k$, dengan $p \in \mathbb{Z}$. Perhatikan bahwa :

$$4q^2 + 7q - 4p^3 + 6p^2 - 3p = 133$$

$$4k^3 - 6k^2 + 3k + 122 = 0 \ldots\ldots \quad (7)$$

Untuk menyelesaikan persamaan (7) digunakan *software* dan didapatkan *output* pada Gambar 2.



Gambar 2. Solusi dan grafik persamaan 7

Dapat dilihat pada grafik pada gambar 2, pada persamaan (7) hanya terdapat satu titik potong pada sumbu x yang artinya untuk setiap $q|p$ hanya etrdapat satu solusi nilai p dan bukan merupakan bilangan bulat. Serta untuk solusi yang lain dapat disajikan dalam Tabel 4.

Tabel 4. Solusi persamaan 6.

q	p_1	p_2	p_3
1	-2.65	–	–
7	0.504	–	–
19	0.4010287	–	–
133	0.200399	–	–

Dari Tabel 4, dapat dilihat untuk $q|p$ tidak terdapat nilai p bilangan bulat dari persamaan (6).

∴ Jadi untuk $x = 8q + 7, y = 4p - 2$, dengan $a, b \in \mathbb{Z}^+$, yang memenuhi $a|b$ atau $b|a$ pada persamaan Diophantine $x^2 = y^3 + 2185$ terbukti tidak mempunyai solusi bilangan bulat saat FPB $(y, 8) = 2$. ■

KESIMPULAN DAN SARAN

Kesimpulan

Pada sub himpunan bilangan ganjil G_3 dengan membagi ruang pencarian solusi menjadi 4 ruang diperoleh hasil, yaitu : untuk y dimana $\text{FPB}(y, 8) = 1$, $\text{FPB}(y, 8) = 4$,dan $\text{FPB}(y, 8) = 8$ terbukti tidak memiliki solusi. Sedangkan untuk kasus $\text{FPB}(y, 8) = 2$, dengan melakukan transformasi $x = 8b + 1$, $y = 4a - 2$ menjadi persamaan (3), apabila $a|b$ atau $b|a$, maka persamaan Diophantine $x^2 = y^3 + 2185$ hanya mempunyai satu pasang solusi, yaitu : $(x, y) = (49,6)$. Pada persamaan (3) untuk kasus $a \nmid b$ atau $b \nmid a$ belum dilakukan penelitian.

Pada sub himpunan bilangan ganjil G_4 dengan membagi ruang pencarian solusi menjadi 4 ruang diperoleh hasil, yaitu : untuk y dimana $\text{FPB}(y, 8) = 1$, $\text{FPB}(y, 8) = 4$,dan $\text{FPB}(y, 8) = 8$ terbukti tidak memiliki solusi. Sedangkan untuk kasus $\text{FPB}(y, 8) = 2$, dengan melakukan transformasi $x = 8q + 7$, $y = 4p - 2$ menjadi persamaan (6), apabila $p|q$ atau $q|p$, maka persamaan Diophantine $x^2 = y^3 + 2185$ terbukti juga tidak memiliki solusi. Pada persamaan (6) untuk kasus $p \nmid q$ atau $q \nmid p$ belum dilakukan penelitian.

Saran

Perlu dilakukan penelitian lanjutan untuk menyelidiki solusi dari persamaan (3) saat $a \nmid b$ atau $b \nmid a$ dan persamaan (6) saat $p \nmid q$ atau $q \nmid p$

DAFTAR PUSTAKA

Bauer, M., and M. Bennett. 2002. Application of hypergeometric method to the generalized Ramanujan – Nagell equation. (English summary) *Ramanujan J.* 6 (2): 209-270.

Fraleigh, J. B. 2000. *A First Course In Abstract Algebra,* 6th Edition.. Addison-Welsey Publishing Company, New York.

Ulas, M. 2012. Some Observations on the Diophantine Equation $y^2 = x! + A$ and related result, Bull. *Aust. Math. Soc*. 86: 377-388.