Integral Baire-1 Stieltjes, Henstock-Stieltjes dan Riemann-Stieltjes

Kalfin D. Muchtar[1], Jullia Titaley[2], Mans L. Mananohas[3]

[1]Program Studi Matematika, FMIPA, UNSRAT Manado, kalfin_muchtar@yahoo.com
[2]Program Studi Matematika, FMIPA, UNSRAT Manado, july_titaley@yahoo.com
[3]Program Studi Matematika, FMIPA, UNSRAT Manado, mansmananohas@yahoo.com

Abstrak

Beberapa sifat dasar termasuk Kriteria Cauchy dan Teorema Aditif dapat diberlakukan pada konsep integral Baire-1 Stieltjes. Misalkan f dan g merupakan fungsi-fungsi bernilai real yang didefinisikan pada $[a,b]\subset\mathbb{R}$. Jika f terintegral Baire-1 Stieltjes terhadap g pada $[a,b]$, maka f terintegral Henstock-Stieltjes terhadap g pada $[a,b]$ dengan nilai integralnya sama. Syarat cukup agar fungsi f yang terintegral Henstock-Stieltjes terhadap g pada $[a,b]$ terintegral Baire-1 Stieltjes terhadap g pada $[a,b]$ yaitu f fungsi kelas Baire-1 dan g fungsi bervariasi terbatas pada $[a,b]$. Jika f terintegral Riemann-Stieltjes terhadap fungsi g pada $[a,b]$, maka f terintegral Baire-1 Stieltjes terhadap g pada $[a,b]$ dengan nilai integralnya sama.

Kata Kunci: Integral Baire-1 Stieltjes, Integral Henstock-Stieltjes, Integral Riemann-Stieltjes

The Stieltjes Integrals of Baire-1, Henstock and Riemann

Abstract

The Baire-1 Stieltjes integral possess the elementary integral properties including Cauchy Criterion and Additivity Theorem. Let f and g are real valued functions defined on $[a,b]\subset\mathbb{R}$. If f is Baire-1 Stieltjes integrable with respect to g on $[a,b]$, then f is Henstock-Stieltjes integrable with respect to g on $[a,b]$, and the values of the integrals are the same. We obtain that the integrand which is Baire-1 function and the integrator which is of bounded variation is a sufficient condition for Henstock-Stieltjes integrable function to be Baire-1 Stieltjes integrable. If f is Riemann-Stieltjes integrable with respect to g on $[a,b]$, then f is Baire-1 Stieltjes integrable with respect to g on $[a,b]$, and the values of the integrals are the same.

Keywords: *Baire-1 Stieltjes Integral, Henstock-Stieltjes Integral, Riemann-Stieltjes Integral*

1. Pendahuluan

Integral tipe Stieltjes merupakan pengembangan integral biasa dalam artian panjang $v-u$ dari subinterval $[u,v]$ yang digunakan pada definisi integral biasa diganti dengan $g(v)-g(u)$ untuk suatu fungsi g bernilai real. Integral Riemann-Stieltjes merupakan integral tipe Stieltjes yang pertama kali diperkenalkan oleh Thomas Joannes Stieltjes pada tahun 1894. Kemudian pada tahun 1914, Frigyes Riesz menggunakan teori integral Riemann-Stieltjes untuk menunjukkan bahwa setiap fungsional linier pada ruang fungsi kontinu dapat diekspresikan menggunakan integral tersebut. Teorema ini kemudian dikenal sebagai Teorema Representasi Riesz **[1]** .

Pada tahun 1998 Jong Sul Lim, Ju Han Yoon dan Gwang Sik Eun **[2]** mendefinisikan integral Henstock-Stieltjes fungsi bernilai real dan menyelidiki beberapa sifat dasar dari integral tipe Stieltjes ini. Pada tahun 2001 Lee dan Caroline Su Yin **[3]** mendefinisikan suatu jenis integral tipe Riemann yang belakangan dikenal sebagai integral Baire-1dan menyelidiki sifat-sifat dasarnya serta mengkaji hubungan antara integral Baire-1 dengan integral Riemann dan integral Henstock-Kurzweil.

Pada tahun 2014, Karlo S. Orge dan Julius V. Benitez **[1]** mengembangkan definisi integral Baire-1 tipe Stieltjes. Dalam makalah ini, dibuktikan beberapa sifat dasar integral Baire-1 Stieltjes, di antaranya Kriteria Cauchy dan Teorema Aditif. Selain itu telah dikaji hubungan integral Henstock-Stieltjes dan integral Baire-1 Stieltjes, di antaranya dengan memberikan syarat cukup agar fungsi yang terintegral Henstock-Stieltjes terintegral Baire-1 Stieltjes, dan dikaji pula hubungan antara integral Riemann-Stieltjes dan integral Baire-1 Stieltjes.

2. Fungsi Baire-1

Definisi 1 [4]
Diberikan fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. f disebut fungsi Baire-1 jika ada barisan fungsi kontinu yang konvergen titik demi titik (*pointwise convergence*) ke f.

Definisi 2 [5]
Suatu fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ disebut fungsi Baire-1 jika $\forall\, \epsilon > 0$ terdapat fungsi positif $\delta(\cdot)$ pada $\mathbb{R}$ sedemikian sehingga $\forall\, x, y \in$ dengan $|x - y| < \min\{\delta(x), \delta(y)\}$ berakibat $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.

3. Partisi Terlabel dan *Gauge* pada $[a, b]$

Definisi 3 [6]
Diberikan suatu himpunan tertutup dan terbatas $I := [a, b] \subset \mathbb{R}$.

a. Sebuah partisi (*partition*) dari interval I didefinisikan sebagai koleksi $\mathcal{P} := \{I_i\}_{i=1}^{n}$ sedemikian sehingga $\operatorname{int}(I_i) \cap \operatorname{int}(I_j) = \emptyset$ dan $\bigcup_{i=1}^{n} I_i = I$ diman $I_i \coloneqq [x_{i-1}, x_i]$ dan $a = x_0 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots x_n = b$.
b. Didefinisikan *norm* pada $\mathcal{P}$ yaitu $\|\mathcal{P}\| := \sup_{1 \le i \le n}(x_i - x_{i-1})$.
c. Titik $x_i\ \ \forall\, i \in \{1, \ldots, n\}$ disebut sebagai titik partisi (*partition point*) dari $\mathcal{P}$.
d. Sebuah titik ξ_i yang dipilih dari interval $I_i\ \forall\, i \in \{1, \ldots, n\}$ disebut sebagai label (*tag*), dan koleksi $\dot{\mathcal{P}} := \{([x_{i-1}, x_i], \xi_i)\}_{i=1}^{n}$ disebut sebagai partisi terlabel (*tagged partition*) dari I.

4. Fungsi Bervariasi Terbatas

Definisi 4 [7]
Diberikan fungsi $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Variasi dari f pada $[a, b]$ didefinisikan sebagai

$$\operatorname{Var}(f, [a, b]) = \sup\{\textstyle\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| :\ \mathcal{P} \text{ partisi dari } [a, b]\}\ .$$

Jika ada bilangan real $M > 0$ sedemikian sehingga $\operatorname{Var}(f, [a, b]) \le M$, maka f fungsi bervariasi terbatas pada $[a, b]$.

5. Integral Riemann-Stieltjes

Definisi 5 [7]
Diberikan dua fungsi $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$. Fungsi f terintegral Riemann-Stieltjes terhadap g pada $[a, b]$ jika ada bilangan real L sedemikian sehingga $\forall\, \epsilon > 0$ terdapat bilangan real $\delta > 0$ sedemikian sehingga jika $\dot{\mathcal{P}}$ sebarang partisi terlabel dengan $\|\mathcal{P}\| < \delta$, maka

$$\left|S(f, g, \dot{\mathcal{P}}) - L\right| < \epsilon$$

dimana $S\left(f, g, \dot{\mathcal{P}}\right) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(g(x_i) - g(x_{i-1}))$.
Lebih lanjut, bilangan real L disebut sebagai integral Riemann-Stieltjes f terhadap g pada $[a, b]$ dan ditulis

$$L = (\mathcal{RS}) \int_a^b f\, dg\ .$$

6. Integral Henstock-Stieltjes

Definisi 6 [2]
Misalkan g fungsi monoton naik pada $[a, b]$. Fungsi $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ terintegral Henstock-Stieltjes terhadap g pada $[a, b]$ jika ada bilangan real L sedemikian sehingga $\forall\, \epsilon > 0$ terdapat *gauge* $\delta(\cdot)$ pada $[a, b]$ sedemikian sehingga jika $\dot{\mathcal{P}}$ sebarang partisi terlabel yang subordinat terhadap $\delta(\cdot)$, maka

$$\left|S(f, g, \dot{\mathcal{P}}) - L\right| < \epsilon$$

dimana $S\left(f, g, \dot{\mathcal{P}}\right) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(g(x_i) - g(x_{i-1}))$.
Lebih lanjut, bilangan real L disebut sebagai integral Henstock-Stieltjes f terhadap g pada $[a, b]$ dan ditulis $L = (\mathcal{HS}) \int_a^b f\, dg$.

7. Integral Baire-1 Stieltjes

Definisi 7 [1]
Misalkan $\delta(\cdot)$ *gauge* pada $[a,b]$. Misalkan pula $\dot{\mathcal{P}} = \{([x_{i-1},x_i],\xi_i)\}_{i=1}^{n}$ dan $\dot{\mathcal{P}}^* = \{([x_{i-1},x_i],\eta_i)\}_{i=1}^{n}$ partisi terlabel dari $[a,b]$. Partisi terlabel $\dot{\mathcal{P}}^*$ dikatakan sebagai $\dot{\mathcal{P}}$-*compatible* dan ditulis $\dot{\mathcal{P}}^* \sim \dot{\mathcal{P}}$ jika $|\xi_i - \eta_i| < \delta(\eta_i)\ \forall\ i \in \{1,\dots,n\}$.

Definisi 8 [1]
Diberikan dua fungsi $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$. Fungsi f terintegral Baire-1 Stieltjes terhadap g pada $[a,b]$ jika ada bilangan real L sedemikian sehingga $\forall\, \epsilon > 0$ terdapat *gauge* $\delta(\cdot)$ pada $[a,b]$ sedemikian sehingga jika $\dot{\mathcal{P}}$ sebarang partisi terlabel yang subordinat terhadap $\delta(\cdot)$ dan $\dot{\mathcal{P}}^*$ sebarang partisi terlabel dengan $\dot{\mathcal{P}}^* \sim \dot{\mathcal{P}}$, maka

$$\left|S(f,g,\dot{\mathcal{P}}^*) - L\right| < \epsilon$$

dimana

$$S\left(f,g,\dot{\mathcal{P}}^*\right) = \sum_{i=1}^{n} f(\eta_i)\left(g(x_i) - g(x_{i-1})\right).$$

Lebih lanjut, bilangan real L disebut sebagai integral Baire-1 Stieltjes f terhadap g pada $[a,b]$ dan ditulis

$$L = (\mathcal{BS})\int_a^b f\,dg\,.$$

8. Metodologi Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah dengan melakukan studi literatur dengan tahapan sebagai berikut :

a. Mempelajari konsep integral Baire-1 Stieltjes, integral Henstock-Stieltjes dan integral Riemann-Stieltjes.
b. Mempelajari konsep fungsi Baire-1.
c. Membuktikan beberapa sifat dasar integral Baire-1 Stieltjes.
d. Membuktikan bahwa setiap fungsi terintegral Baire-1 Stieltjes terintegral Henstock-Stieltjes.
e. Membangun syarat cukup agar fungsi yang terintegral Henstock-Stieltjes terintegral Baire-1 Stieltjes.
f. Membuktikan bahwa setiap fungsi yang terintegral Riemann-Stieltjes terintegral Baire-1 Stieltjes.

9. Hasil dan Pembahasan

9.1. Beberapa Sifat Dasar Integral Baire-1 Stieltjes

Teorema 1 [1]
Misalkan $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$. Jika f terintegral Baire-1 Stieltjes terhadap fungsi g pada $[a,b]$, maka integralnya tunggal.

Teorema 2 [1]
Misalkan f dan f^* terintegral Baire-1 Stieltjes terhadap g pada $[a,b]$ dan f terintegral Baire-1 Stieltjes terhadap g^* pada $[a,b]$. Misalkan $\alpha \in \mathbb{R}$. Maka

a. $f + f^*$ terintegral Baire-1 Stieltjes terhadap g pada $[a,b]$, dan
$$(\mathcal{BS})\int_a^b (f+f^*)\,dg = (\mathcal{BS})\int_a^b f\,dg + (\mathcal{BS})\int_a^b f^*\,dg.$$
b. αf terintegral Baire-1 Stieltjes terhadap g pada $[a,b]$, dan
$$(\mathcal{BS})\int_a^b \alpha f\,dg = \alpha\cdot(\mathcal{BS})\int_a^b f\,dg.$$
c. f terintegral Baire-1 Stieltjes terhadap $g + g^*$ pada $[a,b]$, dan
$$(\mathcal{BS})\int_a^b f\,d(g+g^*) = (\mathcal{BS})\int_a^b f\,dg + (\mathcal{BS})\int_a^b f\,d\,g^*$$
d. f terintegral Baire-1 Stieltjes terhadap αg pada $[a,b]$, dan
$$(\mathcal{BS})\int_a^b f\,d\alpha g = \alpha\cdot(\mathcal{BS})\int_a^b f\,dg\,.$$

Teorema 3 [1]
Misalkan $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$.Maka f terintegral Baire-1 Stieltjes terhadap g pada $[a,b]$ jika dan hanya jika $\forall\, \epsilon > 0$, terdapat suatu *gauge* $\delta(\cdot)$ pada $[a,b]$ sedemikian sehingga untuk setiap dua partisi terlabel $\dot{\mathcal{P}}$ dan $\dot{\mathcal{Q}}$ yang subordinat terhadap $\delta(\cdot)$ dan untuk semua $\dot{\mathcal{P}}^* \sim \dot{\mathcal{P}}$ dan $\dot{\mathcal{Q}}^* \sim \dot{\mathcal{Q}}$, maka

$$\left|S\big(f, g, \dot{\mathcal{P}}^*\big) - S\big(f, g, \dot{\mathcal{Q}}^*\big)\right| < \epsilon .$$

Teorema 4 [1]
Misalkan $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ dan $c \in (a,b)$. Jika f terintegral Baire-1 Stieltjes terhadap g pada $[a,c]$ dan $[a,c]$, maka f terintegral Baire-1 Stieltjes terhadap g pada $[a,b]$, dan

$$(\mathcal{BS}) \int_a^b f\, dg = (\mathcal{BS}) \int_a^c f\, dg + (\mathcal{BS}) \int_c^b f\, dg.$$

Teorema 5
Diberikan fungsi-fungsi $f, g, h : [a,b] \to \mathbb{R}$. Misalkan g monoton naik pada $[a,b]$ dan $f(x) \le h(x)\ \forall\, x \in [a,b]$. Jika f dan h masing-masing terintegral Baire-1 Stieltjes terhadap g pada $[a,b]$, maka

$$(\mathcal{BS}) \int_a^b f\, dg \le (\mathcal{BS}) \int_a^b h\, dg .$$

9.2. Hubungan Integral Henstock-Stieltjes dan Integral Baire-1 Stieltjes

Teorema 6
Jika f terintegral Baire-1 Stieltjes terhadap g pada $[a,b]$, maka f terintegral Henstock-Stieltjes terhadap g pada $[a,b]$ dan

$$(\mathcal{BS}) \int_a^b f\, dg = (\mathcal{HS}) \int_a^b f\, dg.$$

Teorema 7
Misalkan f terintegral Henstock-Stieltjes terhadap g pada $[a,b]$. Jika f fungsi Baire-1 dan g bervariasi terbatas pada $[a,b]$, maka f terintegral Baire-1 Stieltjes terhadap g pada $[a,b]$.

Contoh :
Diberikan dua fungsi $f, g : [1,2] \to \mathbb{R}$ yang masing-masing didefinisikan sebagai

$$f(x) := \begin{cases} 1 & ,\ x \in \left\{\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right\} \\ 0 & ,\ x \in [1,2] \setminus \left\{\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right\} \end{cases} \quad \text{dan} \quad g(x) := x^2\ \ \forall\, x \in [1,2].$$

Buktikan bahwa $(\mathcal{BS}) \int_1^2 f\, dg = 0$.
Solusi :
Diberikan sebarang $\epsilon > 0$. Pertama akan ditunjukkan bahwa g fungsi bervariasi terbatas pada $[1,2]$. Karena $g \in C^1[1,2]$ monoton naik, maka g dan g' kontinu pada $[1,2]$. Akibatnya g' terbatas pada $[1,2]$, yakni terdapat bilangan real $M > 0$ sedemikian sehingga $|g'(x)| \le M\ \forall\, x \in [1,2]$. Akibatnya g bervariasi terbatas pada $[1,2]$ dengan

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(g, [a,b]) &= \sup\left\{\textstyle\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} |g(x_i) - g(x_{i-1})| : \dot{\mathcal{P}} \text{ partisi dari } [1,2].\ \right\} \\ &= g(b) - g(a) = b^2 - a^2 . \end{aligned}$$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa f fungsi Baire-1. Misalkan $A := \left\{\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right\}$. Karena f kontinu di setiap $\xi \in [1,2] \setminus \left\{\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right\}$, maka terdapat bilangan real $\delta_\xi > 0$ sedemikian sehingga $\forall\, x \in [1,2]$ dengan $|x - \xi| < \delta_\xi$, maka $|f(x) - f(\xi)| < \frac{\epsilon}{2(b^2 - a^2)}$. Sekarang definisikan fungsi positif $\delta(\cdot)$ pada $[1,2]$ dengan rumus

$$\delta(x) := \begin{cases} \frac{1}{8}\ , & x \in \left\{\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right\} \\ \delta_x\ , & x \in [1,2] \setminus \left\{\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right\} \end{cases}$$

Misalkan $|x - y| < \min\{\delta(x), \delta(y)\}$. Maka hanya ada tiga kemungkinan.
Pertama, $x \in [1,2] \setminus \left\{\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right\}$ dan $y \in \left\{\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right\}$. Maka $|x - y| < \min\left\{\delta_x, \frac{1}{8}\right\} < \delta_x$.
Oleh karena itu $|f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{2(b^2 - a^2)}$. Kedua, $x \in \left\{\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right\}$ dan $y \in [1,2] \setminus \left\{\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right\}$.

Maka $|x-y| < \min\left\{\frac{1}{8}, \delta_y\right\} < \delta_y$. Oleh karena itu $|f(x)-f(y)| < \frac{\epsilon}{2(b^2-a^2)}$.
Ketiga, $x, y \in [1,2] \setminus \left\{\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right\}$. Maka $|x-y| < \min\{\delta_x, \delta_y\} < \delta_x$.
Oleh karena itu $|f(x)-f(y)| < \frac{\epsilon}{2(b^2-a^2)}$. Berdasarkan ketiga kemungkinan tersebut, maka dapat disimpulkan bahwa f fungsi kelas Baire-1. Selanjutnya, definisikan *gauge* $\rho(\cdot)$ pada $[1,2]$ dengan rumus

$$\rho(x) := \begin{cases} \frac{\epsilon}{16M}, & x \in \left\{\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right\} \\ 1, & x \in [1,2] \setminus \left\{\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right\} \end{cases}$$

Misalkan $\dot{\mathcal{P}} := \{([x_{i-1}, x_i], \xi_i)\}_{i=1}^n$ sebarang partisi terlabel yang subordinat terhadap $\rho(\cdot)$. Karena $g \in C^1[1,2]$, maka $\forall\, i \in \{1, \dots, n\}$ $\exists\, c_i \in (x_{i-1}, x_i)$ sedemikian sehingga $g(x_i) - g(x_{i-1}) = g'(c_i)(x_i - x_{i-1})$.
Misalkan $\sigma := \left\{i :\ \xi_i \in \left\{\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right\}\right\}$. Maka

$$\begin{aligned} \left|S(f,g,\dot{\mathcal{P}})\right| = \left|\textstyle\sum_{i\in\sigma} f(\xi_i)\left(g(x_i) - g(x_{i-1})\right)\right| &= \left|\textstyle\sum_{i\in\sigma} g'(c_i)(x_i - x_{i-1})\right| \\ &\le M \cdot \left|\textstyle\sum_{i\in\sigma}(x_i - x_{i-1})\right| \\ &< M \cdot 4 \cdot 2\rho\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

Sekarang definisikan sebuah fungsi positif $\gamma(\cdot) := \min\{\rho(\cdot), \delta(\cdot)\}$ pada $[1,2]$. Jelas bahwa $\gamma(\cdot)$ merupakan *gauge* pada $[1,2]$. Misalkan $\dot{\mathcal{Q}} := \{([y_{i-1}, y_i], \eta_i)\}_{i=1}^n$ sebarang partisi yang subordinat terhadap $\gamma(\cdot)$. Maka $\dot{\mathcal{Q}}$ juga subordinat terhadap $\rho(\cdot)$. Jika $\dot{\mathcal{Q}}^* := \{([y_{i-1}, y_i], \zeta_i)\}_{i=1}^n$ sebarang partisi terlabel dari $[1,2]$ dengan $\dot{\mathcal{Q}}^* \sim \dot{\mathcal{Q}}$, maka

$$\begin{aligned} \left|S(f,g,\dot{\mathcal{Q}}^*)\right| &= \left|S(f,g,\dot{\mathcal{Q}}^*) - S(f,g,\dot{\mathcal{Q}}) + S(f,g,\dot{\mathcal{Q}})\right| \\ &\le \left|S(f,g,\dot{\mathcal{Q}}^*) - S(f,g,\dot{\mathcal{Q}})\right| + \left|S(f,g,\dot{\mathcal{Q}})\right| \\ &= \left|\textstyle\sum_{i=1}^n \left(f(\zeta_i) - f(\eta_i)\right)\left(g(y_i) - g(y_{i-1})\right)\right| + \left|S(f,g,\dot{\mathcal{Q}})\right| \\ &< \frac{\epsilon}{2(b^2-a^2)} \textstyle\sum_{i=1}^n \left(g(y_i) - g(y_{i-1})\right) + \frac{\epsilon}{2} \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Karena $\epsilon > 0$ sebarang, maka dapat disimpulkan bahwa f terintegral Baire-1 Stieltjes terhadap g pada $[1,2]$ dengan $(\mathcal{BS}) \int_1^2 f\, dg = 0$.

9.3. Hubungan Integral Riemann-Stieltjes dan Integral Baire-1 Stieltjes

Teorema 8
Jika f terintegral Riemann-Stieltjes terhadap g pada $[a,b]$, maka f terintegral Baire-1 Stieltjes terhadap g pada $[a,b]$ dan

$$(\mathcal{RS}) \int_a^b f\, dg = (\mathcal{BS}) \int_a^b f\, dg.$$

Lemma 1
Misalkan $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ terbatas dan $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton naik. Maka f terintegral Riemann-Stieltjes terhadap fungsi g pada $[a,b]$ jika dan hanya jika $\forall\, \epsilon > 0$ ada partisi $\mathcal{P}$ dari $[a,b]$ sedemikian sehingga

$$\mathcal{U}(f,g,\mathcal{P}) - \mathcal{L}(f,g,\mathcal{P}) < \epsilon.$$

Teorema 9
Diberikan fungsi-fungsi $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$. Misalkan f terbatas dan $g \in C^1[a,b]$ monoton naik pada $[a,b]$. Jika f kontinu hampir di mana-mana pada $[a,b]$, maka f terintegral Baire-1 Stieltjes terhadap g pada $[a,b]$.

Teorema 10
Diberikan fungsi-fungsi $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$. Jika f kontinu pada $[a,b]$ dan g bervariasi terbatas pada $[a,b]$, maka f terintegral Baire-1 Stieltjes terhadap g pada $[a,b]$.

10. Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan dapat ditarik kesimpulan :

a. Beberapa sifat dasar integral dapat diberlakukan pada konsep integral Baire-1 Stieltjes.

b. Jika f sebarang fungsi yang terintegral Baire-1 Stieltjes terhadap suatu fungsi g pada $[a,b]$, maka f terintegral Henstock-Stieltjes terhadap g pada $[a,b]$ dengan nilai integralnya sama. Lebih lanjut, jika f terintegral Henstock-Stieltjes terhadap g pada $[a,b]$, f fungsi kelas Baire-1 dan g fungsi bervariasi terbatas pada $[a,b]$, maka f terintegral Baire-1 Stieltjes terhadap g pada $[a,b]$ dengan nilai integralnya sama.

c. Jika f sebarang fungsi yang terintegral Riemann-Stieltjes terhadap suatu fungsi g pada $[a,b]$, maka f terintegral Baire-1 Stieltjes terhadap g pada $[a,b]$ dengan nilai integralnya sama.

11. Daftar Pustaka

[1] Ogre, K. S., and J. V Benitez. 2014. Baire One-Stieltjes Integration., *Int. Journal of Math. Analysis*. **8(30) :** 1465-1474.

[2] Lim, J. S., J.H Yoon., and G.S Eun.1998. On Henstock Stieltjes Integral. *Kangweon-Kyungki Math. Jour*. **6(1) :** 87-96.

[3] Lee., C. S. Y. 2001. On Baire-1 Functions. Academic Excercise. National Institute of Education, Nanyang Technlogical University, Singapore. **https://repository.nie.edu.sg/bitstream/10497/2383/3/LeeCarolineSuYin.html** [23 Februari 2016].

[4] Fung, S. 2013. *Functions of Baire Class One*. Notes. Department of Mathematics, University of California, San Diego.

[5] Fenecios, J.P., and E. A Cabral. 2013. On Some Properties of Baire-1 Functions., *Int. Journal of Math. Analysis*.7(**8):** 393-402.

[6] Bartle, R.G., and D. R. Sherbert. 2011. *Introduction to Real Analysis. 4th Edition*. John Wiley and Sons, New York.

[7] Protter, M. H. 1998. *Basic Elements of Real Analysis.* Springer. New York.

[8] Ghorpade, S. R., and B.V. Limaye. 2006. *A Course in Calculus and Real Analysis*. Springer, New York.

[9] Gunawan, H. 2009. Pengantar Analisis Real. FMIPA ITB, Bandung.

[10] Munkres, J. R. 2000. *Topology.2nd Edition*. Prentice Hall, Upper Saddle River.