Eksistensi Solusi Persamaan Diophantine Tipe Ramanujan – Nagell $x^2 = y^n + 2185$ Dengan x Diambil Pada Beberapa Sub Himpunan Bilangan Ganjil

Deisi Natalia Maapanawang[1], Jullia Titaley[2], Mans L. Mananohas[3*]

[1,2] Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Sam Ratulangi Manado

*corresponding author email: mansmananohas@yahoo.com

Abstrak

Persamaan Diophantine merupakan suatu persamaan yang mempertanyakan solusi bilangan bulat dari persamaan tersebut. Pada tahun 2014 Ulas mengajukan sebuah konjektur mengenai solusi bilangan bulat dari Persamaan Diophantine tipe Ramanujan – Nagell $x^2 = y^n + 2185$. Tujuan penelitian ini adalah untuk menyelidiki solusi bilangan bulat dari persamaan $x^2 = y^n + 2185$ dengan x merupakan anggota dari beberapa sub himpunan bilangan ganjil, G_1, G_2, G_3, G_4, dan G_5 dimana : $G_1 = \{x \in \text{bilangan ganjil} \mid x \equiv 1 \bmod 4 \text{ dan } x \equiv 0 \bmod 5\}$, $G_2 = \{x \in \text{bilangan ganjil} \mid x \equiv 1 \bmod 6\}$, $G_3 = \{x \in \text{bilangan ganjil} \mid x \equiv 1 \bmod 8\}$, $G_4 = \{x \in \text{bilangan ganjil} \mid x \equiv 7 \bmod 8\}$, $G_5 = \{x \in \text{bilangan ganjil} \mid x \equiv 5 \bmod 16\}$. Selain itu, juga diobservasi untuk y kuadrat sempurna. Dari hasil penelitian menunjukan bahwa pada $x \in G_2$ dengan $n = 3$ dan y kuadrat sempurna dengan $n = 3$, terdapat solusi bilangan bulat dari Persamaan $x^2 = y^n + 2185$, yaitu $(x, y) = (49, 6$ dan $221, 36)$, sedangkan pada $x \in G_1$ dengan $n \geq 3$, $x \in G_3$ dengan $n > 3$, $x \in G_4$ dengan $n > 3$, $x \in G_5$ dengan $n > 4$, tidak mempunyai solusi bilangan bulat.

Kata kunci :Persamaan Diophantine, Diophantine Ramanujan–Nagell

The Existence Solution Of Diophantine Equation Ramanujan – Nagell Type $x^2 = y^n + 2185$ With x Taken By Some Sub Set Of Odd Number

Abstarct

The Diophantine equation is an equation which asked about integer number solution of that equation. In 2014, Ulas was submitted a conjecture about integer solution of Diophantine Equation of Ramanujan – Nagell type $x^2 = y^n + 2185$. *The purpose of this tesis is for research integer solution from equation* $x^2 = y^n + 2185$ *with x taken by some sub set of odd number. The definition* G_1 , G_2, G_3, G_4 *and* G_5, *where :* $G_1 = \{x \in odd\ number | x \equiv 1 \bmod 4 \text{ dan } x \equiv 0 \bmod 5\}$, $G_2 = \{x \in odd\ number | x \equiv 1 \bmod 6\}$, $G_3 = \{x \in odd\ number | x \equiv 1 \bmod 8\}$,$G_4 = \{x \in odd\ number | x \equiv 7 \bmod 8\}$ $G_5 = \{x \in odd\ number | x \equiv 5 \bmod 16\}$. *Another that, the observation for y is completing square. From the result of this research show that at* $x \in G_2$ *with* $n = 3$ *and y is completing the square with* $n = 3$, *the are have a solution of integer number from the equation* $x^2 = y^n + 2185$ *that is* (*x,y*) = (49,6 *and* 221,36), *meanwhile at* $x \in G_1$ *and* $n \geq 3$, $x \in G_3$ *and* $n > 3$, $x \in G_4$ *and* $n > 3$, $x \in G_5$ *and* $n > 4$, *there are not have a solution of integer number.*

Keywords: Diophantine Equation ,DiophantineRamanujan–Nagell

1. Pendahuluan

Persamaan Diophantine merupakan suatu persamaan yang mempertanyakan solusi bilangan bulat dari persamaan tersebut. Salah satu Persamaan Diophantine adalah $x^2 = 2^n - 7$. Pada tahun 1913 Ramanujan mengajukan pertanyaan tentang semua solusi bilangan bulat dari persamaan ini. Hampir 30 tahun pertanyaan ini belum mendapat jawaban yang memuaskan, sehingga pada tahun 1943 Ljunggren kembali mempertanyakan solusi dari persamaan itu. 5 tahun setelah itu, yaitu pada tahun 1948 Nagell berhasil memecahkan masalah di atas, Ia berhasi lmenemukan semua solusi bilangan bulat positif (*x,n*) dari persamaan $x^2 = 2^n - 7$, yaitu : (*x,n*) = (1,3) , (3,4) , (5,5) (11,7) dan (181,15). Sejak itu persamaan ini dikenal dengan persamaan Ramanujan–Nagell. Bukti dari fakta ini dipublikasikan di Inggris pada tahun 1960. Hasil ini memberikan motivasi kepada para metematikawan untuk menemukan solusi persamaan yang lebih umum dari tipe persamaan Ramanujan – Nagell.

$$x^2 = Ak^n + \mathrm{B}, k \in \mathbb{Z}_{\geq 2}, A, B \in \mathbb{Z}\backslash\{0\} \tag{1}$$

di mana$A, B > 0$. Banyak perhatian serta tulisan yang dihasilkan oleh para matematikawan untuk mempelajari tipe persamaan ini, salah satunya kasus dimana A = 1 dan k bilangan prima [1].

2. Persamaan Diophantine $x^2 = y^n + 2185$

Adapun usaha untuk mencari solusi persamaan (1) terus dilakukan, salah satu hasil penelitian terbaru telah dipublikasikan oleh Maciej Ulas padatahun 2014. Dalam tulisannya [2], Ulas mengajukan sebuah konjektur berikut ini :

Jika (*x,y,n*) dimana *x,y* bilangan bulat positif dan $n \geq 3$, adalah solusi dari persamaan Diophantine bertipe Ramanujan – Nagell $x^2 = y^n + 2185$ maka :

n = 3 , (*x,y*) = (49,6) , (221,36) , (248,39) , (1949,156)
n = 4 , (*x,y*) = (59,6)
n = 6 , (*x,y*)= (221,6)

Telah dilakukan penelitian tentang solusi bilangan bulat positif dari persamaan $x^2 = y^n + 2185$, untuk kasus $n \geq 4$ adalah bilangan genap telah terbukti solusi persamaan $x^2 = y^n + 2185$ adalah (*x,y,n*) = {(59,6,4) , (221,6,6)} tepat sesuai konjektur, dan juga untuk kasus *n* = 3 dengan *x* genap telah terbukti solusi persamaan $x^2 = y^n + 2185$ yaitu (*x,y*) = (248,39) tepat sesuai konjektur [1].

3. Metodologi Penelitian

3.1. Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian dilaksanakan pada bulan Juni 2016 sampai September 2016 di Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Sam Ratulangi .

3.2. MetodePenelitian

Dalam penelitian ini menggunakan beberapa sub himpunan bilangan ganjil pada *x* untuk menyelidiki solusi bilangan bulat dari persamaan $x^2 = y^n + 2185$. Beberapa sub himpunan bilangan ganjil tersebut, diantaranya :

1. $\mathrm{G}_1 = \{x \in$ bilangan ganjil $| x \equiv 1 \bmod 4$ dan $x \equiv 0 \bmod 5\}$.
2. $\mathrm{G}_2 = \{x \in$ bilangan ganjil $| x \equiv 1 \bmod 6\}$.
3. $\mathrm{G}_3 = \{x \in$ bilangan ganjil $| x \equiv 1 \bmod 8\}$.
4. $\mathrm{G}_4 = \{x \in$ bilangan ganjil $| x \equiv 7 \bmod 8\}$.
5. $\mathrm{G}_5 = \{x \in$ bilangan ganjil $| x \equiv 5 \bmod 8\}$.

Selain mengkaji *x* pada beberapa sub himpunan bilangan ganjil, selanjutnyadiobservasi untuk *y* adalah kuadrat sempurna. Dalam penelitian ini telah dikajieksistensi solusi Persamaan Diophantine $x^2 = y^n + 2185$ pada beberapa kasus, yaitu :

1. Untuk $n \geq 3$ dan $x \in \mathrm{G}_1$
2. Untuk $n = 3$, $2 \nmid y$, $3 \nmid y$ dan$x \in \mathrm{G}_2$
3. a. Untuk $n > 3$ dan $x \in \mathrm{G}_3$
   b. Untuk $n > 3$ dan $x \in \mathrm{G}_4$

4. Untuk $n > 4$ dan $x \in G_5$
5. Untuk $n \geq 3$ dan y adalah kuadrat sempurna.

4. Hasil dan Pembahasan

Preposisi 4.1 (kasus 1. Untuk $n \geq 3$ dan $x \in G_1$)
Misalkan $x, y, n \in \mathbb{Z}^+$ dengan $n \geq 3$. Persamaan Diophantine $x^2 = y^n + 2185$, tidak mempunyai solusi bilangan bulat positif apabila $x \equiv 1 \bmod 4$, $x \equiv 0 \bmod 5$.
Bukti :

$$x^2 = y^n + 2185 \qquad (2)$$

karena x adalah ganjil, dapat dengan mudah diketahui bahwa y genap, artinya y dapat ditulis $y \equiv 0 \bmod 4$. Karena $y \equiv 0 \bmod 4$, dapat ditulis $y = 4b$. Karena $x \equiv 0 \bmod 5$, maka y juga haruslah $\equiv 0 \bmod 5$. Sehingga y menjadi $y \equiv 0 \bmod 20$ dapat ditulis dengan $y = 20q$.
Karena $x \equiv 1 \bmod 4$, sehingga dapat ditulis $x = 4a + 1$, $\forall a \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

$$\begin{aligned} x = 4a + 1 \equiv 0 \bmod 5 \quad &\Leftrightarrow 4a \equiv 4 \bmod 5 \\ &\Leftrightarrow a \equiv 1 \bmod 5 \\ &\Leftrightarrow a = 5p + 1 \ , \ \forall p \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \end{aligned}$$

$x = 4(5p + 1) + 1 = 20p + 5$
$y = 20q$
Substitusi kepersamaan (2) , diperoleh : $(20p + 5)^2 = (20q)^n + 2185$ (3)
Berdasarkan Persamaan (3) diperoleh : $25 \bmod 200 \equiv 185 \bmod 200$. Kontradiksi .

Jadi, terbukti persamaan Diophantine $x^2 = y^n + 2185$, tidak mempunyai solusi bilangan bulat positif apabila $n = 3$ dan $x \in G_1$.

Preposisi 4.2(kasus 2. Untuk $n = 3$, $2 \nmid y$, $3 \nmid y$ dan $x \in G_2$)
Untuk $x \equiv 1 \bmod 6$ dengan $n = 3$, $2 \nmid y$ dan $3 \nmid y$, satu – satunya pasangan solusi bilangan bulat positif dari Persamaan Diophantine $x^2 = y^n + 2185$ adalah $(x, y) = (49, 6)$.
Bukti :
$x \equiv 1 \bmod 6$, dapat ditulis $x = 6k + 1$, sehingga berlaku :
$x^2 = (6k + 1)^2 = 36k^2 + 12k + 1$.
Dengan $n = 3$ dan $x^2 = 36k^2 + 12k + 1$ disubstitusikan ke Persamaan (2) diperoleh :

$$36k^2 + 12k + 1 = y^3 + 2185 \qquad (4)$$

Selanjutnya, menggunakan modulo 6 untuk memperoleh y .
$(36k^2 + 12k + 1) \bmod 6 = (y^3 + 1) \bmod 6$
$1 \bmod 6 - 1 \bmod 6 = y^3$
diperoleh, $y^3 = 0 \bmod 6$,dapat ditulis $y^3 = 6a$.

$$y^3 = 6a \qquad (5)$$

$$y \cdot y^2 = 6 \cdot a \qquad (6)$$

Persamaan (6) dapat dibagi menjadi 6 kasus, yaitu :

i. $y \cdot y^2 = 6 \cdot a$
   $y = 6$ dan $y^2 = a = 36$
ii. $y \cdot y^2 = 6 \cdot a$
   $y \cdot y^2 = 2 \cdot 3a$
   $y = 2$ dan $y^2 = 3a \Leftrightarrow y^2 = a = \frac{4}{3}$
iii. $y \cdot y^2 = 6 \cdot a$
   $y \cdot y^2 = 3 \cdot 2a$
   $y = 3$ dan $y^2 = 2a \Leftrightarrow y^2 = a = \frac{9}{2}$
iv. $y \cdot y^2 = 6 \cdot a$
   $y \cdot y^2 = 1 \cdot 6a$
   $y = 1$ dan $y^2 = 6a \Leftrightarrow y^2 = a = \frac{1}{6}$

$y^2 \cdot y = 6 .a = \frac{6}{r} \cdot ar$

v. $y^2 = \frac{6}{r}$ dan $y = ar \Leftrightarrow (ar)^2 = \frac{6}{r} \Leftrightarrow a^2r^3 = 6$

vi. $y^2 \cdot y = 6 .a$

$= 6r .\frac{a}{r}$

$y^2 = 6r$ dan $y = \frac{a}{r}$

Pada kasus yang ke 6, kondisi kontradiksi dengan asumsi $2 \nmid y$ dan $3 \nmid y$. Selain itu, Karena $y, a \in \mathbb{Z}^+$, maka $0 < y < y^2$, sehingga persamaan (6) hanya terdapat satu kasus yang memenuhi, yaitu : $y = 6$ dan $a = y^2 = 36$. Sementara, jika $y = 6$, diperoleh persamaan $x^2 = 2401$. Adapun satu – satunya bilangan bulat positif yang memenuhi persamaan ini adalah $x = 49$.

Jadi, diperoleh salah satu pasangan solusi bilangan bulat (x, y, n) dari persamaan $x^2 = y^n + 2185$ adalah $(x, y, n) = (49, 6, 3)$.

Preposisi 4.3 (kasus 3.a. untuk $n > 3$ dan $x \in G_3$)
Misalkan $n > 3$, $x \equiv 1 \bmod 8$, Persamaan Diophantine $x^2 = y^n + 2185$ tidak mempunyai solusi bilangan bulat positif .

Bukti :
Karena x ganjil, dengan mudah diketahui bahwa y adalah genap, artinya y dapat ditulis $y = 2m$., sehingga berlaku :

$x^2 = 2^n m^n + 2185$ (7)

$x \equiv 1 \bmod 8$, dapat ditulis $x = 8k + 1$, $\forall k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.
Andaikan k adalah bilangan genap .
Tulis $k = 2p$, Sehingga berlaku $x = 8 (2p) + 1 = 16 p + 1$
Akibatnya, $x^2 = (16 p + 1)^2 = 256 p^2 + 32p + 1 \equiv 1 \bmod 16$ (8)
Sementara, $2^n m^n + 2185 \equiv (0 + 9) \bmod 16$, $n > 3$
Berdasarkan Persamaan (7) diperoleh : $1 \bmod 16 \equiv 9 \bmod 16$. Kontradiksi .
Selanjutnya, andaikan k adalah bilangan ganjil .
tulis $k = 2p + 1$, Sehinggaberlaku : $x = 8 (2p + 1) + 1 = 16p + 8 + 1 = 16 p + 9$
Akibatnya, $x^2 = (16p + 9)^2 = 256p^2 + 288p + 81 \equiv 1 \bmod 16$ (9)
Sementara, $2^n m^n + 2185 \equiv (0 + 9) \bmod 16$, $n > 3$
Berdasarkan Persamaan (7) diperoleh : $1 \bmod 16 \equiv 9 \bmod 16$. Kontradiksi .

Jadi, dapat disimpulkan bahwa pada kasus $x \in G_3$ dan $n > 3$, Persamaan Diophantine (7) tidak mempunyai solusi bilangan bulat positif .

Preposisi 4.4 (kasus 3.b. untuk $n > 3$ dan $x \in G_4$)
Misalkan $n > 3$, $x \equiv 7 \bmod 8$, Persamaan Diophantine $x^2 = y^n + 2185$ tidak mempunyai solusi bilangan bulat positif .
Bukti :
$x \equiv 7 \bmod 8$, dapat ditulis dengan $x = 8k + 7$, $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.
Andaikan k adalah bilangan genap .
tulis $k = 2p$, Sehinggaberlaku : $x = 8 (2p) + 7 = 16 p + 7$
Akibatnya, $x^2 = (16 p + 7)^2 = 256 p^2 + 224p + 49 \equiv 1 \bmod 16$ (10)
Karena x ganjil, sehingga dengan mudah diketahui bahwa y adalah genap, artinya y dapat ditulis $y = 2m$, $\forall m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$
Akibatnya, $2^n m^n + 2185 \equiv (0 + 9) \bmod 16$, $n > 3$
Berdasarkan Persamaan (7) diperoleh : $1 \equiv 9 \bmod 16$. Kontradiksi .
Selanjutnya, andaikan k adalah bilangan ganjil .
Tulis $k = 2p + 1$, Sehingga berlaku : $x = 8 (2p + 1) + 7 = 16 p + 8 + 7 = 16 p + 15$
Akibatnya, $x^2 = (16 p + 15)^2 = 256 p^2 + 480p + 225 \equiv 1 \bmod 16$ (11)
Sementara, $2^n m^n + 2185 \equiv (0 + 9) \bmod 16$, $n > 3$
Berdasarkan Persamaan (7) diperoleh : $1 \equiv 9 \bmod 32$. Kontradiksi.

Jadi, dapat disimpulkan bahwa pada kasus $x \in G_4$dan n>3 ,Persamaan Diophantine $x^2 = y^n + 2185$ tidak mempunyai solusi bilangan bulat positif.

Preposisi 4.5 (kasus 4. Untuk $n > 4$ dan $x \in G_5$)
Misalkan $n > 4$,$x \equiv 5 \bmod 16$, Persamaan Diophantine $x^2 = y^n + 2185$ tidak mempunyai solusi bilangan bulat positif.
Bukti :
$x \equiv 5 \bmod 16$, dapat ditulis dengan $x = 16k + 5$, $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.
Akibatnya, $x^2 = (16\,p + 5)^2 = 256\,p^2 + 160p + 25 \equiv 7 \bmod 32$ (12)
Karena$x$ bilangan ganjil ,dengan mudah diketahui bahwa y adalah genap. Artinya,y dapatditulis $y = 2m$,$\forall\, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.
Akibatnya, $2^n m^n + 2185 \equiv (0 + 9) \bmod 32$, n >4
Berdasarkan Persamaan (7) diperoleh : $7 \equiv 9 \bmod 32$. Kontradiksi.

Jadi, dapat disimpulkan bahwa Persamaan Diophantine $x^2 = y^n + 2185$ tidak mempunyai solusi bilangan bulat positif apabila$x \in G_5$dan $n > 4$.

Preposisi 4.6 (kasus 5. Untuk $n \geq 3$ dan y kuadrat sempurna)
Untuk $n \geq 3$ dan y kuadrat sempurna, Persamaan Diophantine $x^2 = y^n + 2185$ mempunyai salah satu pasangan solusi bilangan bulat positif $(x, y) = (221, 36)$.
Bukti :
Karena y kuadrat sempurna maka dapat ditulis $y = q^2$, q adalah bilangan bulat. Sehingga Persamaan Diophantine $x^2 = y^n + 2185$, menjadi :
$x^2 = (q^2)^n + 2185$ (13)
Atau $x^2 = (q^n)^2 + 2185$.
$x^2 - q^{2n} = 2185$ (14)
Persamaan (14) dapat diuraikan menjadi : $(x - q^n)\,(x + q^n) = 2185$
Atau $(x - q^n)\,(x + q^n) = 5 \cdot 19 \cdot 23$
Karen ax ,q , $n \in \mathbb{Z}^+$, maka $0 < x - q^n < x + q^n$, sehingga persamaan (14) dapat dibagi menjadi 4 kasus yaitu :

i. $(x - q^n) = 1$
Dari kasus ini diperoleh :$q^n = 1092$, karena $n = 3$, maka q tidak mempunyai solusi bulat.

ii. $(x - q^n) = 5$
Dari kasus ini diperoleh :$q^n = 216$, karena $n = 3$, maka di peroleh $q = 6$. Karena $y = q^2$, maka dengan mudah diperoleh $y = 36$. Sementara jika y= 36 diperoleh$x^2 = 48841$. Adapun satu – satunya bilangan bulat positif yang memenuhi persamaan ini adalah $x = 221$.

iii. $(x - q^n) = 19$
Dari kasus ini diperoleh : $q^n = 48$, karena $n = 3$, maka q tidak mempunyai solusi bulat.

iv. $(x - q^n) = 23$
Dari kasus ini diperoleh : $q^n = 36$, karena $n = 3$, maka q tidak mempunyai solusi bulat.

Jadi, diperoleh salah satu pasangan solusi bilangan bulat (x, y, n) dari persamaan $x^2 = y^n + 2185$ adalah $(x, y, n) = (221, 36, 3)$.

5. Kesimpulan

Pada sub himpunan bilangan ganjil G_2 dan $n = 3$, terdapat hanya satu solusi bilangan bulat dari Persamaan $x^2 = y^n + 2185$, yaitu $(x , y) = (49, 6)$, sedangkan pada sub himpunan bilangan ganjil G_1 dan $n \geq 3$, G_3 dan $n > 3$, G_4 dan $n > 3$, G_5 dan $n > 4$, tidak mempunyai solusi bilangan bulat. Sementara pada y kuadrat sempurna dan $n = 3$ terdapat salah satu solusi bilangan bulat dari Persamaan $x^2 = y^n + 2185$ yaitu $(x , y) = (221, 36)$.

6. Daftar Pustaka

[1] Mananohas, M. L. 2015. *Persamaan Diophantine TipeRamanujan – Nagell* $x^2 = y^n + 2185$. *Jurnal MIPA Unsrat Online* 4 (2): 108 – 110.

[2] Ulas, M. 2014. *Some Experiments with Ramanujan – Nagell Type Diophantine Equation*, *Math. N T*.

[3] Bauer, M &Bennet, M. 2002. *Application of hypergeometric method to the generalized Ramanujan-Nagell equation.* (English summary) Ramanujan J. 6 (2): 209 – 270.

[4] Stiller, J. 1996. The Diophantine equation $x^2 + 119 = 15 \cdot 2^n$has exactly six solution, Rocky Mountain J. Math. 26 (1): 295 – 298.

[5] Ulas, M. 2012. *Some Observations on the Diophantine Equation* $y^2 = x! + A$ *and related result*, Bull. Aust. Math. Soc. 86:377 – 388.