Karakteristik Konikoida

Sahlan Sidjara[1*] , Muhammad Abdy[2]

[1,2] **Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Makassar**
*corresponding author email: sahlansidjara@unm.ac.id

Abstrak

Pada geometri bidang khususnya pada kasus irisan kerucut terdapat beberapa bentuk yang dapat diperoleh dari irisan kerucut diantaranya: Lingkaran, Elips, Hiperbola dan Parabola. Selanjutnya, bentuk-bentuk tersebut pada geometri ruang disebut sebagai konikoida yang terdiri dari: bola, elipsoida, kerucut eliptik,hiperboloida daun satu, hiperboloida daun dua, paraboloida eliptik, paraboloida hiperboloida,silinder hiperbolik dan silinder parabolik. Tulisan ini membahas mengenai karakteristik dari konikoida berdasakan kerucut arah dan pusat konikoida.

***Kata Kunci**: konikoida, kerucut arah dan pusat konikoida.*

The Characteristics Of Conicoid

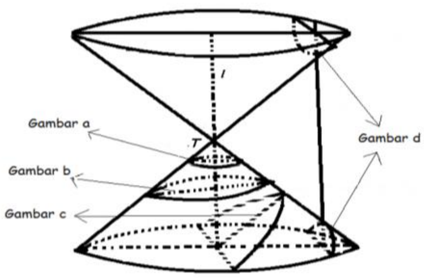
Abstract

On the plane geometry study especially in the case of conic slices, there are several forms from conic slices for example: cirlce, ellips, hypernolic and parabolic.However, these forms on the space of geometry known as conicoid consisting of: sphere, ellipsoid, cone elliptic, one leaves hyperboloid , two leaves hyperbolid, elliptic parabolod, hyperboloid parabolic, hyperboloid cylinder, elliptic cylinder and parabolic cylinder. This paper discusses about the characteristics of conicoid besed on its center and cone direction.

***Keywords:**: conicoid, center conicoid and cone direction.*

1. Pendahuluan

Kata “geometri” berasal dari bahasa yunani (*greek*) yang berarti ‘‘ukuran bumi’’. Maksudnya mencakup mengukur segala sesuatu yang ada di bumi. Geometri kuno sebagian dimulai dari pengukuran praktis yang diperlukan untuk pertanian orang-orang Babylonia dan Mesir. Kemudian geometri orang Mesir dan Babylonia ini diperluas untuk perhitungan panjang ruas garis, luas dan volume. Berdasarkan ruang lingkup atau bidang kajiannya, geometri terdiri atas beberapa kelompok salah satu diantaranya adalah geometri bidang (dimensi dua) dan geometri ruang (dimensi tiga). Dalam geometri bidang (dimensi dua), terdapat penjelasan mengenai konik (irisan kerucut) [1]. Menurut [2], Irisan antara kerucut dengan bidang rata (dimensi dua) meliputi: lingkaran, elips, hiperbola dan parabola, untuk lebih jelasnya, perhatikan gambar 1.



Gambar 1. Irisan Kerucut

1) Lingkaran diperoleh dengan memotong bagian dari selimut kerucut dengan sebuah bidang rata yang tegak lurus terhadap sumbu kerucut *(l)* tetapi tidak melalui titik T (gambar a).
2) Elips diperoleh dengan memotong bagian dari selimut kerucut dengan bidang rata dan tidak tegak lurus terhadap sumbu kerucut (*l*) (gambar b).

3) Parabola diperoleh dengan memotong kerucut dengan bidang rata yang sejajar dengan pelukis kerucut (gambar c).
4) Hiperbola diperoleh dengan memotong selimut kerucut (selimut bagian atas dan bawah) dengan bidang rata yang sejajar dengan sumbu kerucut *(l)* (gambar d).

Lingkaran, hiperbola, parabola dan elips adalah bangun-bangun pada geometri bidang (dimensi dua). Bola, hiperboloida, paraboloida dan elipsoida adalah bangun-bangun pada geometri ruang (dimensi tiga) dan merupakan bentuk-bentuk dari konikoida [1].

Menurut [3], menyatakan bahwa secara umum persamaan umum konikoida berbentuk $f(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + \quad 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$ dengan paling sedikit a_{11}, a_{22} , a_{33}, a_{12} , a_{13}, dan a_{23} tidak sama dengan nol. Kerucut arah (KA) konikoida diperoleh dengan menghapus bagian linear dan bagian konstanta dari konikoida yaitu:

$$\text{KA: } a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz = 0$$

atau secara matriks persamaan konikoida tersebut dapat ditulis:

$$[x \quad y \quad z]\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + 2[a_{14} \quad a_{24} \quad a_{34}]\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + [a_{44}] = 0$$

Atau:

$V^TAV + 2B^TV + C = 0$ dengan

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}, V = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \end{bmatrix}$ dan $C = [a_{44}]$

V^TAV disebut sebagai bagian homogen kuadratis.

$2B^TV$ disebut bagian linear dan

C disebut konstanta dari konikoida.

Jenis-jenis konikoida antara lain bola, elipsoida, kerucut eliptik,hiperboloida daun satu, hiperboloida daun dua, paraboloida eliptik, paraboloida hiperboloida,silinder hiperbolik, silinder parabolik dapat dilihat di [1] dan penjelasan mengenai rank dari suatu matriks dapat dilihat di [3].

2. Pembahasan

2.1. Kerucut Arah

Berikut ini merupakan penggolongan konikoida berdasarkan kerucut arah.

Teorema 2.1. Berdasarkan persamaan umum konikoida: $f(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + \quad 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$, diiris dengan z =1 maka diperoleh persamaan

$$f(x, y) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

Jika $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$, $H = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$ dan $S = a_{11} + a_{22}$

Maka

Untuk $H \neq 0$, diperoleh irisan kerucut arah dengan bidang *z* = 1 yaitu kerucut sejati yang terdiri dari:

(1) Jika $D > 0$, $\frac{S}{H} < 0$ maka diperoleh elips nyata.

(2) Jika $D > 0$, $\frac{S}{H} > 0$ maka diperoleh elips khayal

(3) Jika $D < 0$ maka diperoleh hiperbola (selalu nyata).

(4) Jika $D = 0$ maka diperoleh parabola (selalu nyata).

Untuk *H* = 0, diperoleh irisan kerucut arah dengan bidang *z* = 1 berubah corak menjadi sepasang garis lurus yang terdiri dari:

(1) Jika $D > 0$ maka diperoleh sepasang garis khayal.

(2) Jika $D < 0$ maka diperoleh sepasang garis nyata berpotongan

(3) Jika $D = 0$ maka diperoleh sepasang garis sejajar atau berhimpit.

Bukti

Berdasarkan persamaan umum konikoida:

$f(x,y,z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0.$

Diiris dengan bidang z = 1 maka diperoleh:

$f(x,y) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33} + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34} + a_{14} = 0.$

$\Rightarrow\ f(x,y) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + (2a_{13}x + 2a_{14}x) + (2a_{23}y + 2a_{24}y) + (2a_{34} + +a_{33} + a_{14}) = 0.$

$\Rightarrow\ f(x,y) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + (2a_{13} + 2a_{14})x + (2a_{23} + 2a_{24})y + (2a_{34} + a_{33} + a_{14}) = 0.$

$\Rightarrow\ f(x,y) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$ .... (1)

Untuk $H \neq 0$

Bukti (1)

Diketahui jika $H \neq 0$, $D > 0$ dan $S/H < 0$ irisan merupakan elips nyata

Ambil $a_{11} = -a, a_{22} = -b, a_{33} = c$ dan $a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$ dengan (a, b, c $\in$ bilangan positif) sehingga:

$$H = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -a & 0 & 0 \\ 0 & -b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = abc \neq 0$$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -a & 0 \\ 0 & -b \end{vmatrix} = ab > 0$$

$S = a_{11} + a_{22} = -a - b = -(a+b)$

$\frac{S}{H} = \frac{-(a+b)}{abc} < 0$

Maka berdasarkan persamaan (1) diperoleh:

$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$

$\Rightarrow\ -ax^2 - by^2 + c = 0$

$\Rightarrow\ -ax^2 - by^2 = -c$

$\Rightarrow\ -(ax^2 + by^2) = -c$

$\Rightarrow\ ax^2 + by^2 = c$

$\Rightarrow\ \frac{a}{c}x^2 + \frac{b}{c}y^2 = 1$

$\Rightarrow\ \frac{x^2}{\frac{c}{a}} + \frac{y^2}{\frac{c}{b}} = 1$

$\Rightarrow\ \frac{x^2}{\left(\sqrt{\frac{c}{a}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\sqrt{\frac{c}{b}}\right)^2} = 1$ (merupakan elips nyata).

Bukti (2)

Diketahui jika $H \neq 0$, $D > 0$ dan $S/H > 0$ $\Rightarrow$ irisan merupakan elips khayal

Ambil $a_{11} = -a,\ a_{22} = -b, a_{33} = -c$ dan $a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$ dengan (a, b, c $\in$ bilangan positif) sehingga:

$$H = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -a & 0 & 0 \\ 0 & -b & 0 \\ 0 & 0 & -c \end{vmatrix} = -abc \neq 0$$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -a & 0 \\ 0 & -b \end{vmatrix} = ab > 0$$

$S = a_{11} + a_{22} = -a - b = -(a+b)$

$\frac{S}{H} = \frac{-(a+b)}{-abc} > 0$

Maka berdasarkan persamaan (1) diperoleh:

$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$

$\Rightarrow\ -ax^2 - by^2 - c = 0$

$\Rightarrow\ \frac{a}{c}x^2 + \frac{b}{c}y^2 = -1$

$\Rightarrow\ \frac{x^2}{\frac{c}{a}} + \frac{y^2}{\frac{c}{b}} = -1$

$\Longrightarrow \quad \frac{x^2}{\left(\sqrt{\frac{c}{a}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\sqrt{\frac{c}{b}}\right)^2} = -1$ (merupakan elips khayal).

Bukti (3)

Diketahui jika $H \neq 0$, $D < 0 \Longrightarrow$ irisan merupakan hiperbola

Ambil $a_{11} = a$, $a_{22} = -b$, $a_{33} = c$ dan $a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$ dengan $(a, b, c \in$ bilangan positif) sehingga:

$$H = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & -b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = -abc \neq 0$$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & -b \end{vmatrix} = -ab < 0$$

Maka berdasarkan persamaan (1) diperoleh:

$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$

$\Longrightarrow \quad ax^2 - by^2 - c = 0$

$\Longrightarrow \quad \frac{a}{c}x^2 - \frac{b}{c}y^2 = 1$

$\Longrightarrow \quad \frac{x^2}{\frac{c}{a}} - \frac{y^2}{\frac{c}{b}} = 1$

$\Longrightarrow \quad \frac{x^2}{\left(\sqrt{\frac{c}{a}}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\sqrt{\frac{c}{b}}\right)^2} = 1$ (merupakan hiperbola).

Bukti (4)

Diketahui jika $H \neq 0$, $D = 0 \Longrightarrow$ irisan merupakan parabola

Ambil $a_{11} = a$, $a_{23} = -b$ dan $a_{12} = a_{13} = a_{22} = a_{33} = 0$ dengan $(a, b, \in$ bilangan positif) sehingga:

$$H = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b \\ 0 & -b & 0 \end{vmatrix} = -ab^2 \neq 0$$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & o \end{vmatrix} = 0$$

Maka berdasarkan persamaan (1) diperoleh:

$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$

$\Longrightarrow \quad -ax^2 - 2by = 0$

$\Longrightarrow \quad -2by = -ax^2$

$\Longrightarrow \quad 2by = ax^2$

$\Longrightarrow \quad y = \frac{a}{2b}x^2$ (merupakan parabola).

Untuk $H \neq 0$

Bukti (1)

Diketahui jika $H = 0$, $D > 0 \Longrightarrow$ irisan merupakan sepasang garis khayal.

Ambil $a_{11} = a_{22} = a$, dan $a_{12} = a_{13} = a_{23} = a_{33} = 0$ dengan $(a, \in$ bilangan positif) sehingga:

$$H = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{vmatrix} = a^2 > 0$$

Maka berdasarkan persamaan (1) diperoleh:

$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$

$\Longrightarrow \quad ax^2 + ay^2 = 0$

$\Longrightarrow \quad a(x^2 + y^2) = 0$

$\Longrightarrow \quad x^2 + y^2 = 0$

$\Longrightarrow \quad x^2 = -y^2$

$\Longrightarrow \quad x = \pm\sqrt{-y^2}$ (merupakan sepasang garis khayal)

Bukti (3)

Diketahui jika $H = 0$, $D = 0 \Longrightarrow$ irisan merupakan sepasang garis berhimpit

Ambil $a_{11} = a_{22} = a_{12} = a$, dan $a_{13} = a_{23} = a_{33} = 0$ dengan $(a, \in$ bilangan positif) sehingga:

$$H = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a & 0 \\ a & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a \\ a & a \end{vmatrix} = 0$$

Maka berdasarkan persamaan (1) diperoleh:

$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$

$\Rightarrow \quad ax^2 + ay^2 + 2axy = 0$

$\Rightarrow \quad a(x^2 + y^2 + 2xy) = 0$

$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 + 2xy = 0$

$\Rightarrow \quad (x + y)(x + y) = 0$ (merupakan sepasang garis berhimpit).

2.2. Pusat Konikoida

Persamaan umum konikoida $f(x,y,z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$ dengan pusat $P(x_1, y_1, z_1)$

Definisi 2.2. [6] Persamaan pusat konikoida $f(x,y,z)$ dengan pusat $P(x_1, y_1, z_1)$ adalah $\frac{\partial f(x_1,y_1,z_1)}{\partial x_1} = 0$, $\frac{\partial f(x_1,y_1,z_1)}{\partial y_1} = 0$, dan $\frac{\partial f(x_1,y_1,z_1)}{\partial z_1} = 0$.

Penggolongan konikoida dapat ditentukan menurut pusat konikoida dengan menyelidiki rank matriks:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ dan } [A,b] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

Teorema 2.3. Misalkan persamaan konikoida $f(x,y,z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$ dengan rank matriks:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \; dan \; [A,b] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

Maka penggolongan konikoida ditentukan dengan cara:

(1) Apabila rank matriks A = rank matriks $[A,b]$ = 3. Diperoleh satu titik pusat yang merupakan salah satu dari: Elipsoida (nyata / khayal), hiperboloida daun satu, hiperboloida daun dua. Pusat konikoida $P(x_1, y_1, z_1)$, jika $f(x_1, y_1, z_1) \neq 0$ (Bukan merupakan kerucut) dan jika $f(x_1, y_1, z_1) = 0$ (merupakan kerucut (nyata/khayal)).

(2) Apabila rank matriks A = 2 sedangkan rank matriks $[A,b]$ = 3.
Tidak diperoleh titik pusat (titik pusat di tak hingga) yang terdapat pada paraboloida eliptik dan paraboloida hiperbolik.

(3) Apabila rank matriks A = rank matriks $[A,b]$ = 2. Tempat kedudukan titik pusat berupa garis lurus yang terdapat pada : Silinder eliptik (nyata/khayal), silinder hiperbolik atau sepasang bidang rata berpotongan (nyata/khayal).

(4) Apabila rank matriks A = 1 sedangkan rank matriks $[A,b] \neq 1$. Tempat kedudukan titik pusat berupa garis lurus di tak berhingga yang terdapat pada silinder parabolik.

(5) Bila rank matriks A = rank matriks $[A,b]$ = 1. Tempat kedudukan titik pusat berupa bidang rata, yang terdapat pada sepasang bidang rata sejajar atau sepasang bidang rata berimpit (nyata/khayal).

Bukti (2.3.1)

a. Ambil $a_{11} = p$, $a_{22} = q$, $a_{33} = r$, $a_{44} = -t$ dan $a_{12} = a_{13} = a_{23} = a_{24} = a_{14} = a_{34} = 0$ dengan $p, q, r, t \in$ bilangan positif, maka:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & r \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Rank } A = 3$$

$$[A,b] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Rank } [A,b] = 3$$

Karena rank A = rank $[A,b]$ = 3, akibatnya diperoleh:

$f(x,y,z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0.$

$\Rightarrow f(x,y,z) = px^2 + qy^2 + rz^2 - t = 0.$

$\Rightarrow px^2 + qy^2 + rz^2 - t = 0.$

$\Rightarrow px^2 + qy^2 + rz^2 - t = 0.$

$\Rightarrow px^2 + qy^2 + rz^2 = t.$

$\Rightarrow \frac{p}{t}x^2 + \frac{q}{t}y^2 + \frac{r}{t}z^2 = 1.$

$\Rightarrow \frac{x^2}{\frac{t}{p}} + \frac{y^2}{\frac{t}{q}} + \frac{z^2}{\frac{t}{r}} = 1.$

$\Rightarrow \frac{x^2}{\left(\sqrt{\frac{t}{p}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\sqrt{\frac{t}{q}}\right)^2} + \frac{z^2}{\left(\sqrt{\frac{t}{r}}\right)^2} = 1$ (merupakan elipsoida nyata)

Jika diambil $a_{44} = t$ maka:

$f(x,y,z) = px^2 + qy^2 + rz^2 + t = 0.$

$\Rightarrow px^2 + qy^2 + rz^2 + t = 0.$

$\Rightarrow px^2 + qy^2 + rz^2 = -t.$

$\Rightarrow \frac{p}{t}x^2 + \frac{q}{t}y^2 + \frac{r}{t}z^2 = -1.$

$\Rightarrow \frac{x^2}{\frac{t}{p}} + \frac{y^2}{\frac{t}{q}} + \frac{z^2}{\frac{t}{r}} = -1.$

$\Rightarrow \frac{x^2}{\left(\sqrt{\frac{t}{p}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\sqrt{\frac{t}{q}}\right)^2} + \frac{z^2}{\left(\sqrt{\frac{t}{r}}\right)^2} = -1$ (merupakan elipsoida khayal).

b. Ambil $a_{11} = p$, $a_{22} = q$, $a_{33} = -r$, $a_{44} = -t$ dan $a_{12} = a_{13} = a_{23} = a_{24} = a_{14} = a_{34} = 0$ dengan $p, q, r, t \in$ bilangan positif, maka:

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & -r \end{bmatrix} \Rightarrow$ Rank A = 3

$[A,b] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r & 0 \end{bmatrix}$ Rank $[A,b]$ = 3

Karena rank A = rank [A,b] = 3, akibatnya diperoleh:

$f(x,y,z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0.$

$\Rightarrow f(x,y,z) = px^2 + qy^2 - rz^2 - t = 0.$

$\Rightarrow px^2 + qy^2 - rz^2 - t = 0.$

$\Rightarrow px^2 + qy^2 - rz^2 - t = 0.$

$\Rightarrow px^2 + qy^2 - rz^2 = t.$

$\Rightarrow \frac{p}{t}x^2 + \frac{q}{t}y^2 - \frac{r}{t}z^2 = 1.$

$\Rightarrow \frac{x^2}{\frac{t}{p}} + \frac{y^2}{\frac{t}{q}} - \frac{z^2}{\frac{t}{r}} = 1.$

$\Rightarrow \frac{x^2}{\left(\sqrt{\frac{t}{p}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\sqrt{\frac{t}{q}}\right)^2} - \frac{z^2}{\left(\sqrt{\frac{t}{r}}\right)^2} = 1$ (merupakan hiperboloida daun satu)

Jika diambil $a_{22} = -q$ maka:

$f(x,y,z) = px^2 - qy^2 - rz^2 - t = 0.$

$\Rightarrow px^2 - qy^2 - rz^2 - t = 0.$

$\Rightarrow px^2 - qy^2 - rz^2 = t.$

$\Rightarrow \frac{p}{t}x^2 - \frac{q}{t}y^2 - \frac{r}{t}z^2 = 1.$

$\Rightarrow \frac{x^2}{\frac{t}{p}} - \frac{y^2}{\frac{t}{q}} - \frac{z^2}{\frac{t}{r}} = 1.$

$\Rightarrow \frac{x^2}{\left(\sqrt{\frac{t}{p}}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\sqrt{\frac{t}{q}}\right)^2} - \frac{z^2}{\left(\sqrt{\frac{t}{r}}\right)^2} = 1$ (merupakan hiperboloida daun dua).

c. Ambil $a_{11} = p$, $a_{22} = q$, $a_{33} = -r$, $a_{44} = -t$ dan $a_{12} = a_{13} = a_{23} = a_{24} = a_{14} = a_{34} = 0$ dengan $p, q, r, t \in$ bilangan positif, maka:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & -r \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Rank } A = 3$$

$$[A, b] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Rank } [A,b] = 3$$

Karena rank A = rank $[A,b]$ = 3, akibatnya diperoleh:

$$f(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0.$$

$$\Rightarrow f(x, y, z) = px^2 + qy^2 - rz^2 - t = 0.$$

Pusat $P(x_1, y_1, z_1)$ maka $f(x_1, y_1, z_1) = px_1{}^2 + qy_1{}^2 - rz_1{}^2 - t = 0$, karena:

$$\frac{\partial f(x_1,y_1,z_1)}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow 2px_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$\frac{\partial f(x_1,y_1,z_1)}{\partial y_1} = 0 \Rightarrow 2qy_1 = 0 \Rightarrow y_1 = 0$$

$$\frac{\partial f(x_1,y_1,z_1)}{\partial z_1} = 0 \Rightarrow -2rz_1 = 0 \Rightarrow z_1 = 0$$

Diperoleh Pusat $P(x_1, y_1, z_1) = P(0, 0, 0)$ sehingga:

$f(x_1, y_1, z_1) = f(0, 0, 0) = -t \neq 0$

Karena:

$$f(x, y, z) = px^2 + qy^2 - rz^2 - t = 0$$
$$\Rightarrow px^2 + qy^2 - rz^2 - t = 0.$$
$$\Rightarrow px^2 + qy^2 - rz^2 - t = 0.$$
$$\Rightarrow px^2 + qy^2 - rz^2 = t.$$
$$\Rightarrow \frac{p}{t}x^2 + \frac{q}{t}y^2 - \frac{r}{t}z^2 = 1.$$
$$\Rightarrow \frac{x^2}{\frac{t}{p}} + \frac{y^2}{\frac{t}{q}} - \frac{z^2}{\frac{t}{r}} = 1.$$
$$\Rightarrow \frac{x^2}{\left(\sqrt{\frac{t}{p}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\sqrt{\frac{t}{q}}\right)^2} - \frac{z^2}{\left(\sqrt{\frac{t}{r}}\right)^2} = 1$$ (merupakan hiperboloida daun satu / bukan merupakan kerucut).

d. Ambil $a_{11} = p$, $a_{22} = q$, $a_{33} = -r$, dan $a_{12} = a_{13} = a_{23} = a_{24} = a_{14} = a_{34} = a_{44} = 0$ dengan $p, q, r \in$ bilangan positif, maka:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & -r \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Rank } A = 3$$

$$[A, b] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Rank } [A,b] = 3$$

Karena rank A = rank $[A,b]$ = 3, akibatnya diperoleh:

$$f(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0.$$

$$\Rightarrow f(x, y, z) = px^2 + qy^2 - rz^2 = 0.$$

Pusat $P(x_1, y_1, z_1)$ maka $f(x_1, y_1, z_1) = px_1{}^2 + qy_1{}^2 - rz_1{}^2 = 0$, karena:

$$\frac{\partial f(x_1,y_1,z_1)}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow 2px_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$\frac{\partial f(x_1,y_1,z_1)}{\partial y_1} = 0 \Rightarrow 2qy_1 = 0 \Rightarrow y_1 = 0$$

$$\frac{\partial f(x_1,y_1,z_1)}{\partial z_1} = 0 \Rightarrow -2rz_1 = 0 \Rightarrow z_1 = 0$$

Diperoleh Pusat $P(x_1, y_1, z_1) = P(0, 0, 0)$ sehingga:

$f(x_1, y_1, z_1) = f(0, 0, 0) = 0$

Karena:

$$f(x, y, z) = px^2 + qy^2 - rz^2 = 0$$
$$\Rightarrow px^2 + qy^2 - rz^2 = 0.$$

$\Longrightarrow px^2 + qy^2 - rz^2 = 0.$
$\Longrightarrow px^2 + qy^2 - rz^2 = 0$
$\Longrightarrow \frac{x^2}{\frac{1}{p}} + \frac{y^2}{\frac{1}{q}} - \frac{z^2}{\frac{1}{r}} = 0.$
$\Longrightarrow \frac{x^2}{\left(\sqrt{\frac{1}{p}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\sqrt{\frac{1}{q}}\right)^2} - \frac{z^2}{\left(\sqrt{\frac{1}{r}}\right)^2} = 0$ (merupakan kerucut nyata).

Jika diambil $a_{33} = r$, maka:
$f(x,y,z) = px^2 + qy^2 + rz^2 = 0$
$\Longrightarrow px^2 + qy^2 + rz^2 = 0.$
$\Longrightarrow px^2 + qy^2 + rz^2 = 0.$
$\Longrightarrow px^2 + qy^2 + rz^2 = 0$
$\Longrightarrow \frac{x^2}{\frac{1}{p}} + \frac{y^2}{\frac{1}{q}} + \frac{z^2}{\frac{1}{r}} = 0.$
$\Longrightarrow \frac{x^2}{\left(\sqrt{\frac{1}{p}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\sqrt{\frac{1}{q}}\right)^2} + \frac{z^2}{\left(\sqrt{\frac{1}{r}}\right)^2} = 0$ (merupakan kerucut khayal).

Bukti (2.3.2)

Ambil $a_{11} = p,\ a_{22} = q,\ a_{34} = -r$ dan $a_{12} = a_{13} = a_{23} = a_{24} = a_{14} = a_{33} = a_{44} = 0$ dengan $p, q \in$ bilangan positif, maka:

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow$ Rank A = 2

$[A,b] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r \end{bmatrix} \Longrightarrow$ Rank [A,b] = 3

Karena rank A = 2 dan rank [A,b] = 3, akibatnya diperoleh:

$f(x,y,z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0.$
$\Longrightarrow f(x,y,z) = px^2 + qy^2 - 2rz = 0.$
$\Longrightarrow px^2 + qy^2 = 2rz.$
$\Longrightarrow \frac{x^2}{\frac{1}{p}} + \frac{y^2}{\frac{1}{q}} = \frac{2z}{\frac{1}{r}}.$
$\Longrightarrow \frac{x^2}{\left(\sqrt{\frac{1}{p}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\sqrt{\frac{1}{q}}\right)^2} = \frac{2z}{\frac{1}{r}}$ (merupakan paraboloida eliptik).

Jika diambil $a_{22} = -q$, maka:
$f(x,y,z) = px^2 - qy^2 - 2rz = 0.$
$\Longrightarrow px^2 - qy^2 = 2rz.$
$\Longrightarrow \frac{x^2}{\frac{1}{p}} - \frac{y^2}{\frac{1}{q}} = \frac{2z}{\frac{1}{r}}.$
$\Longrightarrow \frac{x^2}{\left(\sqrt{\frac{1}{p}}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\sqrt{\frac{1}{q}}\right)^2} = \frac{2z}{\frac{1}{r}}$ (merupakan paraboloida hiperbolik)

Bukti (2.3.3)

a. Ambil $a_{11} = p,\ a_{22} = q,\ a_{44} = -r$ dan $a_{12} = a_{13} = a_{23} = a_{24} = a_{14} = a_{33} = a_{34} = 0$ dengan $p,\ q,\ r \in$ bilangan positif, maka:

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow$ Rank A = 2

$[A,b] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow$ Rank [A,b] = 2

Karena rank A = rank [A,b] = 2, akibatnya diperoleh:

$f(x,y,z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0.$

$\Rightarrow f(x,y,z) = px^2 + qy^2 - r = 0.$

$\Rightarrow px^2 + qy^2 = r.$

$\Rightarrow \frac{p}{r}x^2 + \frac{q}{r}y^2 = 1.$

$\Rightarrow \frac{x^2}{\frac{r}{p}} - \frac{y^2}{\frac{r}{q}} = 1$.

$\Rightarrow \frac{x^2}{\left(\sqrt{\frac{r}{p}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\sqrt{\frac{r}{q}}\right)^2} = 1$ (merupakan silinder eliptik).

Jika diambil $a_{22} = -q$, diperoleh:

$f(x,y,z) = px^2 - qy^2 - r = 0.$

$\Rightarrow px^2 - qy^2 = r.$

$\Rightarrow \frac{p}{r}x^2 - \frac{q}{r}y^2 = 1.$

$\Rightarrow \frac{x^2}{\frac{r}{p}} - \frac{y^2}{\frac{r}{q}} = 1$.

$\Rightarrow \frac{x^2}{\left(\sqrt{\frac{r}{p}}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\sqrt{\frac{r}{q}}\right)^2} = 1$ (merupakan silinder hiperbolik).

b. Ambil $a_{11} = p,\ a_{22} = -p$ dan $a_{12} = a_{13} = a_{14} = a_{23} = a_{24} = a_{33} = a_{34} = a_{44} = 0$ dengan $p \in$ bilangan positif, maka:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Rank } A = 2$$

$$[A,b] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Rank } [A,b] = 2$$

Karena rank A = rank $[A,b]$ = 2, akibatnya diperoleh:

$f(x,y,z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0.$

$f(x,y,z) = px^2 - py^2 = 0.$

$\Rightarrow p(x^2 - y^2) = 0.$

$\Rightarrow x^2 - y^2 = 0.$

$\Rightarrow (x+y)(x-y) = 0$ (merupakan sepasang bidang rata nyata berpotongan).

Jika diambil $a_{22} = 0$ dan $a_{44} = 1$, maka:

$f(x,y,z) = px^2 + 1 = 0.$

$\Rightarrow p(x^2 + 1) = 0.$

$\Rightarrow x^2 + 1 = 0.$

$\Rightarrow x^2 = -1.$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{-1}$ (merupakan sepasang bidang rata khayal berpotongan).

Bukti (2.3.4)

Ambil $a_{22} = a_{14} = p$ dan $a_{11} = a_{12} = a_{13} = a_{23} = a_{24} = a_{34} = a_{33} = a_{44} = 0$ dengan $p \in$ bilangan positif, maka:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Rank } A = 1$$

$$[A,b] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & p \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Rank } [A,b] = 2 \neq 1$$

Karena rank A = 1 dan rank $[A,b] \neq 1$, akibatnya diperoleh:

$f(x,y,z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0.$

$\Rightarrow f(x,y,z) = py^2 - 2px = 0.$

$\Rightarrow py^2 - 2px = 0.$

$\Rightarrow p(y^2 - 2x) = 0.$
$\Rightarrow y^2 - 2x = 0.$
$\Rightarrow y^2 = 2x$ (merupakan silinder parabolik).

Bukti (2.3.5)

Ambil $a_{11} = a_{44} = p$, $a_{14} = -p$ dan $a_{11} = a_{12} = a_{13} = a_{23} = a_{24} = a_{34} = a_{33} = 0$ dengan $p \in$ bilangan positif, maka:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{ Rank } A = 1$$

$$[A,b] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 & -p \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Rank } [A,b] = 1$$

Karena rank A = 1 dan rank [A,b] = 1, akibatnya diperoleh:

$f(x,y,z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0.$

$f(x,y,z) = px^2 - 2px + p = 0.$
$\Rightarrow px^2 - 2px + p = 0.$
$\Rightarrow p(x^2 - 2x + 1) = 0.$
$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0.$
$\Rightarrow (x-1)^2 = 0$
$\Rightarrow (x-1)(x-1) = 0$ (merupakan sepasang bidang rata nyata berhimpit).

Jika diambil $a_{14} = 0$, maka diperoleh:

$f(x,y,z) = px^2 + p = 0.$
$\Rightarrow p(x^2 + 1) = 0.$
$\Rightarrow (x^2 + 1) = 0.$
$\Rightarrow (x^2 + 1)^2 = 0.$
$\Rightarrow (x^2 + 1)(x^2 + 1) = 0.$ (merupakan sepasang bidang rata khayal berhimpit).

3. Kesimpulan

Mengacu pada pembahasan mengenai penggolongan konikoida berdasarkan kerucut arahnya (KA) yaitu:

1. KA nyata dan tidak berubah corak maka konikoidanya salah satu dari hiperboloida daun satu atau hiperboloida daun dua.
2. KA khayal dan tidak berubah corak maka konikoidanya salah satu dari elipsoida atau kerucut khayal.
3. KA berubah corak menjadi sepasang bidang rata nyata berpotongan maka konikoidanya salah satu dari paraboloida hiperbolik atau silinder.
4. KA berubah corak menjadi sepasang bidang rata khayal maka konikoidanya merupakan salah satu paraboloida eliptik atau silinder eliptik.
5. KA berubah corak menjadi sepasang bidang rata berhimpit maka konikoidanya merupakan silinder parabolik atau sepasang bidang rata sejajar.

Dan penggolongan konikoida menurut pusat konikoida yaitu dengan menyelidiki rank matriks:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ dan } [A,b] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

(1) Apabila rank matriks A = rank matriks [A,b] = 3. Diperoleh satu titik pusat yang merupakan salah satu dari: Elipsoida (nyata / khayal), hiperboloida daun satu, hiperboloida daun dua. Pusat konikoida $P(x_1, y_1, z_1)$, jika $f(x_1, y_1, z_1) \neq 0$ (Bukan merupakan kerucut) dan jika $f(x_1, y_1, z_1) = 0$ (merupakan kerucut (nyata/khayal)).

(2) Apabila rank matriks A = 2 sedangkan rank matriks [A,b] = 3. Tidak diperoleh titik pusat (titik pusat di tak hingga) yang terdapat pada paraboloida eliptik dan paraboloida hiperbolik.

(3) Apabila rank matriks A = rank matriks [A,b] = 2. Tempat kedudukan titik pusat berupa garis lurus.yang terdapat pada : Silinder eliptik (nyata/khayal), silinder hiperbolik atau sepasang bidang rata berpotongan (nyata/khayal).

(4) Apabila rank matriks A = 1 sedangkan rank matriks $[A,b] \neq 1$. Tempat kedudukan titik pusat berupa garis lurus di tak berhingga yang terdapat pada silinder parabolik.
(5) Bila rank matriks A = rank matriks $[A,b]$ = 1. Tempat kedudukan titik pusat berupa bidang rata, yang terdapat pada sepasang bidang rata sejajar atau sepasang bidang rata berimpit (nyata/khayal).

Untuk menyelidiki konikoida $f(x,y,z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$ dapat dilakukan sebagai berikut:

1. Golongkan terlebih dahulu berdasarkan keadaan titik pusatnya dan rank matriksnya, salah satu dari golongan (1), (2), (3), (4) atau (5).
2. Bila termasuk golongan (1):
   a. Apabila pusatnya terletak pada konikoida maka merupakan kerucut.
   b. Apabila pusatnya tidak terletak pada konikoida maka diselidiki kerucut arahnya (KA) yaitu:
      1) Jika kerucut arahnya khayal maka konikoida merupakan elipsoida.
      2) Jika kerucut arahnya nyata maka konikoida merupakan salah satu dari hiperboloida daun satu atau hiperboloida daun dua. Cara membedakan apakah hiperboloida daun satu atau hiperboloida daun dua yaitu dengan cara:
         a) Pilih sebarang titik pada hiperboloida.
         b) Buat bidang singgung dititik tersebut.
         c) Tentukan proyeksi garis potong hiperboloida dan bidang singgung tersebut (yang tidak tegak lurus bidang singgung).
         d) Jika proyeksi tersebut nyata maka merupakan hiperboloida daun satu dan jika proyeksinya khayal maka merupakan hiperbolida daun dua.
3. Bila termasuk golongan (2) : Selidiki kerucut arahnya (KA)
   a. Apabila kerucut arah (KA) berubah corak menjadi sepasang bidang rata nyata yang berpotongan maka konikoida merupakan parabolida hiperbolik.
   b. Apabila kerucut arah (KA) berubah corak menjadi sepasang bidang rata khayal maka konikoda merupakan paraboloida eliptik.
4. Bila termasuk golongan (3): Lakukan pengirisan dengan salah satu bidang koordinat yang tidak sejajar dengan garis / bidang tempat kedudukan (TK) titik pusat.
   a. Apabila irisannya elips maka konikoida adalah silinder eliptik (jika elips khayal maka selinder eliptik tersebut khayal).
   b. Apabila irisannya hiperbola maka konikoida merupakan silinder hiperbolik.
   c. Apabila irisannya berubah corak menjadi sepasang garis lurus berpotongan maka konikoida merupakan sepasang bidang rata berpotongan.
5. Apabila termasuk golongan (4) maka konikoida merupaka silinder hiperbolik.
6. Apabila termasuk golongan (5): Lakukan pengirisan dengan salah satu bidang koordinat yang tidak sejajar dengan garis / bidang tempat kedudukan (TK) titik pusat.
   a. Apabila irisannya sepasang garis lurus sejajar, maka konikoida adalah sepasang bidang rata sejajar.
   b. Apabila irisannya sepasang garis lurus berimpit, maka konikoida merupakan sepasang bidang rata berimpit.

4. Ucapan Terima Kasih

Ucapan terima kasih kami sampaikan kepada PNBP UNM dan kepada rekan-rekan dosen Jurusan Matemtika FMIPA Universitas Negeri Makassar atas kritikan dan saran-sarannya.

5. Daftar Pustaka

[1] Suryadi, D. 1986. Teori dan Soal Ilmu Ukur Analitik Ruang. Ghalia Indonesia. Jakarta.

[2] Kartiman, R. 1985. Matematika Tingkat Tinggi Cetakan Ketiga. PT. Pradnya Paramita. Jakarta.

[3] Supranto. J. 1971. Pengantar Matrix. Erlangga. Jakarta.