



Penerapan Model SIR terhadap Perkembangan Penyakit Demam Berdarah Dengue (DBD) di Kota Tomohon

Suhendri Arlando Londah¹, Charles E. Mongi¹, Christie E.J.C. Montolalu*

¹Jurusan Matematika–Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam–Universitas Sam Ratulangi Manado, Indonesia

*Corresponding author : christelly@unsrat.ac.id

ABSTRAK

Penelitian ini bertujuan untuk menentukan titik kesetimbangan model penyebaran penyakit DBD di Kota Tomohon dalam penerapan model SIR. Data yang digunakan adalah data jumlah penderita DBD dan jumlah penduduk di Kota Tomohon tahun 2015-2017 dari Dinas Kesehatan Daerah dan Badan Pusat Statistik Kota Tomohon. Dari hasil penelitian menunjukkan bahwa terdapat dua titik kesetimbangan model SIR terhadap perkembangan penyakit DBD di Kota Tomohon yaitu titik bebas penyakit dan titik tetap endemik. Nilai bilangan reproduksi dasar penyakit DBD di Kota Tomohon yang ada di lima wilayah kecamatan semuanya < 1 . Hasil ini menunjukkan penyakit DBD di Kota Tomohon akan berkurang. Sehingga jumlah penderita DBD akan berkurang dalam kurun waktu tertentu.

ABSTRACT

This study aims to determine the balance point of the model of the spread of Dengue Fever in Tomohon City in the application of the SIR model. The data is used on the number of people of Dengue Fever and the number of residents in Tomohon City in 2015-2017 from the Regional Health Official and the Tomohon City Central Bureau of Statistics. The results of the study indicate that there is two equilibrium point of the SIR model for the development of dengue in Tomohon City, which is a disease free equilibrium and endemic equilibrium. The value of basic reproductive numbers of Dengue Fever in Tomohon city in all five sub-districts < 1 . These results indicate that dengue in Tomohon City will decrease. So that the number of dengue sufferers will decrease in a certain period of time.

1. PENDAHULUAN

Demam Berdarah Dengue (DBD) banyak ditemukan di daerah tropis dan sub-tropis. Data dari seluruh dunia menunjukkan Asia menempati urutan pertama dalam jumlah penderita DBD setiap tahunnya. Penyakit DBD masih merupakan salah satu masalah kesehatan masyarakat yang utama di Indonesia. Jumlah penderita dan luas daerah penyebarannya semakin bertambah seiring dengan meningkatnya mobilitas dan kepadatan penduduk. Kasus Demam Berdarah Dengue (DBD) terus bertambah. Secara nasional, jumlah kasus hingga tanggal 3 Februari 2019 adalah sebanyak 16.692 kasus dengan 169 orang meninggal dunia. Kasus terbanyak ada di wilayah Jawa Timur, Jawa Tengah, NTT, dan Kupang [1].

Ditemukannya sejumlah kasus DBD di berbagai Kabupaten/Kota yang ada Provinsi Sulawesi Utara terhitung pada bulan Januari tahun 2019 berjumlah 714 kasus dengan jumlah kematian 11 kasus [2]. Menurut data yang diperoleh dari Dinas Kesehatan Sulawesi Utara, untuk Kota Tomohon sendiri terhitung pada tahun 2018 ada 100 kasus.

Sesuai dari data di atas, maka sangat diperlukan penyajian informasi berupa penerapan model perkembangan penyakit DBD secara berkelanjutan kepada masyarakat, selain itu juga Kota Tomohon sendiri masih sangat rentan dengan kasus DBD di lihat dari kondisi wilayah yang memiliki iklim tropis menyebabkan perubahan curah hujan, suhu, kelembaban, arah udara sehingga berpengaruh terhadap kesehatan terutama perkembangbiakan vektor penyakit seperti nyamuk *Aedes*, malaria dan lainnya.

Penyebaran penyakit DBD yang terjadi pada suatu populasi dapat dimodelkan ke dalam bentuk matematis. Model epidemik merupakan model yang cocok untuk penyebaran penyakit ini. Model epidemik membagi populasi menjadi populasi *susceptible* (rentan) penyakit, populasi *infected* (terinfeksi) dan populasi *recovered* (sembuh).

Model persamaan diferensial nonlinear SIR (*Susceptible, Infectious and Recovered*) pertama kali diperkenalkan pada tahun 1927 oleh Kermack dan McKendrick [3]. DBD adalah salah satu penyakit menular yang dapat diimplementasikan dalam model tersebut. Sebelumnya telah dilakukan penelitian [4].

INFO ARTIKEL

Diterima : 24 Juni 2019

Diterima setelah revisi : 23 Juli 2019

Tersedia online : 25 Juli 2019

Kata Kunci

DBD

Model SIR

Bilangan Reproduksi Dasar

Kesetimbangan

ARTICLE INFO

Accepted : 24 June 2019

Accepted after revision : 23 July 2019

Available online : 25 July 2019

Keywords

Dengue Fever

SIR Model

Basic Reproductive Number

Equilibrium

Dalam penelitian ini model Epidemologi SIR DBD digunakan untuk menentukan titik keseimbangan model dan membandingkan perkembangan penyakit DBD berdasarkan bilangan reproduksi dasar dan data real di Kota Tomohon.

Penyakit Demam Berdarah Dengue (DBD)

Penyakit Demam Berdarah Dengue (DBD) merupakan penyakit berbahaya yang disebabkan oleh virus *dengue* yang hidup di dalam tubuh nyamuk *Aedes aegypti*. Nyamuk *Aedes aegypti* adalah vektor utama penyakit demam berdarah dengue dan berkembang biak pada awal dan akhir musim penghujan. Perkembangbiakan nyamuk *Aedes aegypti* berhubungan erat dengan faktor iklim, salah satunya adalah suhu. Suhu berpengaruh dalam pertumbuhan nyamuk mulai dari telur, larva dan pupa serta bentuk dewasanya [5].

Model Epidemologi SIR

Model epidemologi SIR, pada suatu populasi dibagi menjadi tiga kelompok, yaitu:

1. *Susceptible (S)*, yaitu kelompok individu yang sehat tapi rentan terinfeksi.
2. *Infected (I)*, yaitu kelompok individu yang terinfeksi penyakit menular.
3. *Recovered (R)*, yaitu kelompok individu yang telah pulih dan memiliki kekebalan permanen untuk tidak tertular penyakit yang sama [6].

Model Matematika SIR :

$$\frac{dS}{dt} = -\beta S(t)I(t) \tag{1}$$

$$\frac{dI}{dt} = (\beta S(t) - k)I(t) \tag{2}$$

$$\frac{dR}{dt} = kI(t) \tag{3}$$

Keterangan :

$\frac{dS}{dt}$ = jumlah individu rentan terhadap waktu

$\frac{dI}{dt}$ = jumlah individu terinfeksi terhadap waktu

$\frac{dR}{dt}$ = jumlah individu yang telah pulih terhadap waktu

k = laju pemulihan ($k \geq 0$)

β = laju rata-rata penularan penyakit ($\beta \geq 0$)

α = kemungkinan terjadi infeksi [7].

Model Epidemologi SIR Penyakit DBD

Model Esteva–Vargas mengasumsikan bahwa populasi manusia pada suatu daerah adalah konstan, sebesar N_H . Asumsi ini berarti bahwa laju kematian sama dengan laju kelahiran, misalkan besarnya μ_H . Populasi nyamuk *Aedes aegypti* diberikan oleh persamaan

$$\frac{dN_v}{dt} = A - \mu_v N_v \tag{4}$$

Dengan N_v, A dan μ_v berturut-turut merupakan jumlah populasi, laju penambahan (*recruitment rate*) dan laju kematian dari *Aedes aegypti*. Untuk waktu yang cukup lama ($t \rightarrow \infty$) jumlah *Aedes aegypti* ini akan mendekati suatu nilai konstan, yaitu A/μ_v .

Selanjutnya populasi manusia dibagi menjadi tiga sub-populasi: *susceptible* S_H , *infective* I_H dan *recovered* R_H . Sedangkan populasi *Aedes aegypti* dibagi dua sub-populasi karena masa hidup nyamuk cukup singkat dibandingkan dengan masa hidup manusia. Kedua sub-populasi tersebut adalah

susceptible S_V dan *infective* I_V . Dengan notasi ini, model penyebaran DBD diberikan oleh persamaan :

$$\frac{dS_H}{dt} = \mu_H N_H - \frac{\beta_H b}{N_H} S_H I_V - \mu_H S_H \tag{5}$$

$$\frac{dI_H}{dt} = \frac{\beta_H b}{N_H} S_H I_V - (\mu_H + \gamma_H) I_H \tag{6}$$

$$\frac{dR_H}{dt} = \gamma_H I_H - \mu_H R_H \tag{7}$$

$$\frac{dS_V}{dt} = A - \frac{\beta_V b}{N_H} S_V I_H - \mu_V S_V \tag{8}$$

$$\frac{dI_V}{dt} = \frac{\beta_V b}{N_H} S_V I_H - \mu_V I_V \tag{9}$$

Keterangan :

S_V : populasi nyamuk yang rentan terinfeksi.

I_V : populasi nyamuk yang terinfeksi.

S_H : populasi manusia yang rentan terinfeksi.

I_H : populasi manusia yang terinfeksi.

R_H : populasi manusia yang sembuh.

N_H : total populasi manusia.

N_V : total populasi nyamuk.

γ_H : proporsi perpindahan manusia terinfeksi ke manusia sembuh.

dimana β_H dan β_V berturut - turut merupakan probabilitas penyebaran demam berdarah dari nyamuk ke manusia dan dari manusia ke nyamuk, serta b merupakan rata - rata gigitan seekor nyamuk per hari [8].

Sistem Persamaan Diferensial Biasa Nonlinear

Bentuk umum dari persamaan diferensial biasa linier pada persamaan 10 :

$$a_0(t) \frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t) \frac{dx}{dt} + \dots + a_{n-1}(t) \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + a_n(t)x = f(t) \tag{10}$$

dengan $a_n \neq 0, a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ disebut koefisien persamaan diferensial. Fungsi $f(t)$ disebut *input* dan solusi dari persamaan diferensial $x(t)$ disebut *output*. Jika ruas kanan $f(t)$ bernilai 0 untuk semua nilai t dalam interval yang ditinjau, maka persamaan ini disebut homogen, jika sebaliknya disebut nonhomogen

Misalkan suatu persamaan diferensial biasa dinyatakan sebagai berikut :

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} Ax + b ; x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \tag{11}$$

dengan A adalah matriks koefisien konstan berukuran $n \times n$ dan b adalah vector konstan. Sistem persamaan (11) dinamakan Sistem Persamaan Diferensial Biasa Linear Orde Satu dengan kondisi awal $x(0) = x_0$. Jika $b = 0$, maka system dikatakan homogen dan jika $b \neq 0$, maka system dikatakan tak homogen (Tu, 1994).

Misalkan suatu sistem persamaan diferensial biasa dinyatakan dalam persamaan (12).

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{12}$$

dengan

$$x = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \text{ dan } f(x, t) = \begin{bmatrix} f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{bmatrix}$$

adalah fungsi tak linear dalam x_1, x_2, \dots, x_n . Sistem persamaan (12) disebut sistem persamaan diferensial biasa nonlinear [9].

Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Misalkan A adalah matriks $n \times n$ maka suatu vektor tak nol x di dalam \mathbb{R}^n disebut vektor eigen dari A , jika untuk suatu skalar λ , yang disebut nilai eigen dari A , berlaku

$$Ax = \lambda x \tag{13}$$

Vektor x disebut vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen λ .

Untuk mencari nilai eigen dari matriks A yang berukuran $n \times n$ maka persamaan (13) dapat dituliskan sebagai berikut

$$(A - \lambda I)x = 0 \quad (14)$$

dengan I matriks identitas. Persamaan (14) mempunyai solusi tak nol jika dan hanya jika

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad (15)$$

Persamaan (15) disebut persamaan karakteristik dari A [10].

Titik Tetap dan Kestabilan Titik Tetap

Misalkan diberikan sistem persamaan diferensial biasa sebarang $\dot{x} = f(x), x \in R^n$. Titik \bar{x} disebut titik tetap jika $f(\bar{x}) = 0$. Titik tetap disebut juga titik kritis atau titik kesetimbangan.

Terdapat dua titik tetap yaitu :

1. Titik tetap bebas penyakit (*Disease Free Equilibrium*)

Titik tetap bebas penyakit atau suatu keadaan dimana tidak terjadi penyebaran penyakit menular dalam populasi.

2. Titik tetap endemik (*Endemic Equilibrium*)

Titik tetap endemik atau suatu keadaan dimana terjadi penyebaran penyakit menular dalam populasi [11].

Misalkan sistem persamaan diferensial biasa sebarang $\dot{x} = f(x), x \in R^n$ memiliki titik tetap \bar{x} . Kestabilan titik tetap tersebut dapat dilihat dari nilai-nilai eigennya, yaitu λ_i dengan $i = 1, 2, 3, \dots, n$ yang diperoleh dari $\det(A - \lambda I) = 0$.

Secara umum titik tetap mempunyai sifat sebagai berikut :

1. Stabil, jika :
 - a. Setiap nilai eigen real adalah negatif : $\lambda_i < 0$ untuk setiap i , atau
 - b. Nilai eigen kompleks bagian ($Re(\lambda_i) < 0$ untuk setiap i .
2. Tak Stabil, jika :
 - a. Terdapat paling sedikit satu nilai eigen real positif : $\lambda_i > 0$.
 - b. Terdapat paling sedikit satu nilai eigen kompleks dengan $Re(\lambda_i) > 0$ [12].

Linearisasi

Menurut hardiningsih [13], Linierisasi digunakan untuk menyelesaikan suatu sistem autonomous yang berbentuk:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y) \end{aligned} \quad (16)$$

Dimana f dan g adalah tak linier. Jika (x_0, y_0) adalah titik kritis dari sistem (16) maka:

$$\begin{aligned} f(x_0, y_0) &= 0 \\ g(x_0, y_0) &= 0 \end{aligned} \quad (17)$$

Bilangan Reproduksi Dasar

Bilangan reproduksi dasar adalah rata-rata banyaknya individu yang rentan terinfeksi secara langsung oleh individu lain yang telah terinfeksi bila individu yang telah terinfeksi tersebut masuk ke dalam populasi yang seluruhnya masih rentan. Bilangan reproduksi dasar dilambangkan dengan R_0 dan dinyatakan dengan persamaan (21) berikut :

$$R_0 = \frac{C_{hv} I_v / N_h}{\gamma_h} S(0) \quad (21)$$

Keterangan :

C_{hv} : peluang terjadinya kontak antara nyamuk rentan dengan manusia terinfeksi

I_v : populasi nyamuk yang terinfeksi

N_h : jumlah penduduk / populasi

γ_h : proporsi perpindahan manusia terinfeksi ke manusia sembuh

$S(0)$: populasi manusia yang rentan terkena penyakit, untuk $S(0) = N_h - I_h$

dimana untuk nilai dari $C_{hv} = 0,375, I_v = 0,056, \gamma_h = 0,3288330$ [14].

Beberapa kondisi yang akan timbul, yaitu :

1. Jika $R_0 < 1$, maka penyakit akan menghilang.
2. Jika $R_0 = 1$, maka penyakit akan menetap.
3. Jika $R_0 > 1$, maka penyakit akan meningkat menjadi wabah [15].

2. Metodologi Penelitian

Waktu , tempat dan Data

Penelitian dilaksanakan kurang lebih tiga bulan (Februari, Maret, April 2019) di Kota Tomohon, Sulawesi Utara. Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data sekunder tentang penderita DBD dan jumlah penduduk di Kota Tomohon tahun 2015 – 2017. Data tersebut diperoleh dari Dinas Kesehatan Daerah Kota Tomohon dan Badan Pusat Statistik Kota Tomohon.

Prosedur Penelitian

Langkah yang akan dilakukan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mengumpulkan data tentang jumlah penderita DBD dan jumlah penduduk di Kota Tomohon.
2. Menentukan model dinamik matematika yang digunakan.
3. Menentukan titik tetap atau titik kesetimbangan model.
4. Menentukan bilangan reproduksi dasar (R_0) dari penyakit DBD di Kota Tomohon.
5. Menarik kesimpulan dan saran.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Data Jumlah Penderita DBD di Kota Tomohon

Berdasarkan penelusuran data ke Dinas Kesehatan Daerah Kota Tomohon diperoleh data tentang banyaknya penderita DBD di Kota Tomohon seperti pada tabel 1, 2, dan 3.

Tabel 1. Banyaknya Penderita DBD di Kota Tomohon tahun 2015

Kecamatan	Jumlah Penderita			
	Rentan terinfeksi (S)	Terinfeksi (I)	Sembuh (R)	Meninggal
Tomohon Utara	29.248	29	29	-
Tomohon Timur	10.865	10	10	-
Tomohon Tengah	22.727	29	29	-
Tomohon Barat	14.727	13	12	1
Tomohon Selatan	22.678	47	47	-
TOTAL	100.245	128	127	1

Berdasarkan tabel (1) jumlah penderita Demam Berdarah Dengue (DBD) pada tahun 2015 Kecamatan Tomohon Utara populasi manusia yang rentan adalah 29.248 jiwa, populasi manusia yang terinfeksi adalah 29 jiwa, dari populasi manusia yang terinfeksi semuanya sembuh. Kecamatan Tomohon Timur populasi manusia yang rentan adalah 10.865 jiwa,

populasi manusia yang terinfeksi adalah 10 jiwa, dari populasi manusia yang terinfeksi semuanya sembuh. Kecamatan Tomohon Tengah populasi manusia yang rentan adalah 22.727 jiwa, populasi manusia yang terinfeksi adalah 29 jiwa, dari populasi manusia yang terinfeksi semuanya sembuh. Kecamatan Tomohon Barat populasi manusia yang rentan adalah 14.727 jiwa, populasi manusia yang terinfeksi adalah 13 jiwa, dari populasi manusia yang terinfeksi ada 1 yang meninggal. Kecamatan Tomohon Selatan populasi manusia yang rentan adalah 22.678 jiwa, populasi manusia yang terinfeksi adalah 47 jiwa, dari populasi manusia yang terinfeksi semuanya sembuh.

Tabel 2. Banyaknya Penderita DBD di Kota Tomohon tahun 2016

Kecamatan	Jumlah Penderita			
	Rentan terinfeksi (S)	Terinfeksi (I)	Sembuh (R)	Meninggal
Tomohon Utara	29.905	17	17	-
Tomohon Timur	10.965	7	7	-
Tomohon Tengah	23.230	21	21	-
Tomohon Barat	14.813	9	8	1
Tomohon Selatan	22.996	18	18	-
TOTAL	101.909	72	71	1

Berdasarkan tabel (2) jumlah penderita Demam Berdarah Dengue (DBD) pada tahun 2016 Kecamatan Tomohon Utara populasi manusia yang rentan adalah 29.905 jiwa, populasi manusia yang terinfeksi adalah 17 jiwa, dari populasi manusia yang terinfeksi semuanya sembuh. Kecamatan Tomohon Timur populasi manusia yang rentan adalah 10.965 jiwa, populasi manusia yang terinfeksi adalah 7 jiwa, dari populasi manusia yang terinfeksi semuanya sembuh. Kecamatan Tomohon Tengah populasi manusia yang rentan adalah 23.230 jiwa, populasi manusia yang terinfeksi adalah 21 jiwa, dari populasi manusia yang terinfeksi semuanya sembuh. Kecamatan Tomohon Barat populasi manusia yang rentan adalah 14.813 jiwa, populasi manusia yang terinfeksi adalah 9 jiwa, dari populasi manusia yang terinfeksi ada 1 yang meninggal. Kecamatan Tomohon Selatan populasi manusia yang rentan adalah 22.996 jiwa, populasi manusia yang terinfeksi adalah 18 jiwa, dari populasi manusia yang terinfeksi semuanya sembuh.

Tabel 3. Banyaknya Penderita DBD di Kota Tomohon tahun 2017

Kecamatan	Jumlah Penderita			
	Rentan terinfeksi (S)	Terinfeksi (I)	Sembuh (R)	Meninggal
Tomohon Utara	30.605	2	2	-
Tomohon Timur	11.081	-	-	-
Tomohon Tengah	23.770	9	9	-
Tomohon Barat	14.916	2	2	-
Tomohon Selatan	23.321	5	5	-
TOTAL	103.693	18	18	-

Berdasarkan tabel (3) jumlah penderita Demam Berdarah Dengue (DBD) pada tahun 2017 Kecamatan Tomohon Utara populasi manusia yang rentan adalah 30.605 jiwa, populasi manusia yang terinfeksi adalah 2 jiwa, dari populasi manusia yang terinfeksi semuanya

sembuh. Kecamatan Tomohon Timur populasi manusia yang rentan adalah 10.081 jiwa, tidak ada populasi manusia yang terinfeksi. Kecamatan Tomohon Tengah populasi manusia yang rentan adalah 23.770 jiwa, populasi manusia yang terinfeksi adalah 9 jiwa, dari populasi manusia yang terinfeksi semuanya sembuh. Kecamatan Tomohon Barat populasi manusia yang rentan adalah 14.916 jiwa, populasi manusia yang terinfeksi adalah 2 jiwa, dari populasi manusia yang terinfeksi semuanya sembuh. Kecamatan Tomohon Selatan populasi manusia yang rentan adalah 23.321 jiwa, populasi manusia yang terinfeksi adalah 5 jiwa, dari populasi manusia yang terinfeksi semuanya sembuh.

Data Jumlah Penduduk di Kota Tomohon

Selain data di atas, penelitian ini juga menggunakan data jumlah penduduk yang dinyatakan sebagai N_h . Adapun data jumlah penduduk yang digunakan seperti pada tabel 4.

Tabel 4. Banyaknya Jumlah Penduduk Kota Tomohon tahun 2015 – 2017

Kecamatan	Jumlah Penduduk		
	2015	2015	2015
Tomohon Utara	29.277	29.922	30.607
Tomohon Timur	10.875	10.972	11.081
Tomohon Tengah	22.756	23.251	23.779
Tomohon Barat	14.740	14.822	14.918
Tomohon Selatan	22.725	23.014	23.326
TOTAL	100.373	101.981	103.711

Model SIR DBD

Model Host – Vector

Populasi Manusia

$$\frac{d}{dt} S_h = \mu_h N_h - \frac{\beta_h b}{N_h} I_v S_h - \mu_h S_h \tag{22}$$

$$\frac{d}{dt} I_h = \frac{\beta_h b}{N_h} I_v S_h - (\mu_h + \gamma_h) I_h \tag{23}$$

$$\frac{d}{dt} R_h = \gamma_h I_h - \mu_h R_h \tag{24}$$

Populasi Vektor

$$\frac{d}{dt} S_v = \mu_v N_v - \frac{b \beta_v}{N_h} I_h S_v - \mu_v S_v \tag{25}$$

$$\frac{d}{dt} I_v = \frac{\beta_v b}{N_v} I_h S_v - \mu_v I_v \tag{26}$$

Dengan syarat

$$S_h + I_h + R_h = N_h \rightarrow R_h = N_h - S_h - I_h \tag{27}$$

$$S_v + I_v = N_v \xrightarrow{\mu_v} S_v = N_v - I_v = \frac{A}{\mu_v} - I_v \tag{28}$$

Karena itu, model populasi manusia dan nyamuk dapat disederhanakan sebagaimana persamaan (29), (30), dan (31).

$$\frac{d}{dt} S_h = \mu_h N_h - \frac{\beta_h b}{N_h} I_v S_h - \mu_h S_h \tag{29}$$

$$\frac{d}{dt} I_h = \frac{\beta_h b}{N_h} I_v S_h - (\mu_h + \gamma_h) I_h \tag{30}$$

$$\frac{d}{dt} I_v = \frac{\beta_v b}{N_v} I_h S_v - \mu_v I_v \tag{31}$$

Model yang dihasilkan dapat disederhanakan dengan mengandaikan pecahan - pecahan pada persamaan (32).

$$x = \frac{S_h}{N_h}, y = \frac{I_h}{N_h} \text{ dan } z = \frac{I_v}{N_v} = \frac{I_v}{A/\mu_v} \tag{32}$$

Dengan demikian untuk populasi manusia dan nyamuk dapat disederhanakan sebagaimana persamaan (33), (34) dan (35).

$$\frac{dx}{dt} = \mu_h(1 - x(t)) - \alpha x(t)z(t), \tag{33}$$

$$\frac{dz}{dt} = \alpha x(t)z(t) - \beta y(t), \tag{34}$$

$$\frac{dz}{dt} = \gamma(1 - z(t))y(t) - \delta z(t), \quad (35)$$

dengan nilai

$$\alpha = \frac{b\beta_h A}{\mu_h N_h}, \beta = \gamma_h + \mu_h, \gamma = b\beta_v, \delta = \mu_v.$$

Sebuah titik kritis akan terjadi ketika nilai

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = \frac{dz}{dt} = 0. \quad (36)$$

Masukan persamaan (33), (34), dan (35) ke persamaan (36) sehingga didapatkan persamaan (37), (38), dan (39).

$$\mu_h(1 - x(t)) - \alpha x(t)z(t) = 0 \quad (37)$$

$$\alpha x(t)z(t) - \beta y(t) = 0 \quad (38)$$

$$\gamma(1 - z(t))y(t) - \delta z(t) = 0 \quad (39)$$

Masukan persamaan (37) dan (38) ke persamaan (39) menunjukkan bahwa titik – titik keseimbangan dari sistem ini adalah (1,0,0) dan (x_0, y_0, z_0) dengan nilai

$$x_0 = \frac{\mu_h \gamma + \beta \delta}{\gamma(\mu_h + \alpha)}, y_0 = \frac{\mu_h(\gamma \alpha + \beta \delta)}{\beta \gamma(\mu_h + \alpha)}, \text{ dan } z_0 = \frac{\mu_h(\gamma \alpha + \beta \delta)}{\alpha(\gamma \mu_h + \beta \delta)} \quad (40)$$

Linearisasi dari persamaan (33), (34), dan (35) pada titik kesetimbangan (1,0,0) menghasilkan persamaan (41).

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mu_h & 0 & -\alpha \\ 0 & -\beta & \alpha \\ 0 & \gamma & -\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (41)$$

Untuk persamaan (41) mengarah ketiga nilai eigen persamaan (42).

$$\lambda^3 + (\mu_h + \beta + \delta)\lambda^2 + (\mu_h\beta + \mu_h\delta + \beta\delta - \alpha\gamma)\lambda + (\mu_h\beta\delta - \mu_h\alpha\gamma) = 0 \quad (42)$$

dengan nilai eigen,

$$\lambda_1 = -\mu_h; \lambda_2 = -\frac{\beta + \delta + \sqrt{\beta^2 - 2\beta\delta + \delta^2 - 4\alpha\gamma}}{2} \text{ and } \lambda_3 = -\frac{\beta + \delta - \sqrt{\beta^2 - 2\beta\delta + \delta^2 - 4\alpha\gamma}}{2} \quad (43)$$

Linearisasi dari persamaan (33), (34), dan (35) pada titik kesetimbangan (x_0, y_0, z_0) menghasilkan persamaan (44).

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mu_h - \alpha \left(\frac{\mu_h(\gamma \alpha + \beta \delta)}{\alpha(\gamma \mu_h + \beta \delta)} \right) & 0 & -\alpha \left(\frac{\mu_h \gamma + \beta \delta}{\gamma(\mu_h + \alpha)} \right) \\ \alpha \left(\frac{\mu_h(\gamma \alpha + \beta \delta)}{\alpha(\gamma \mu_h + \beta \delta)} \right) & -\beta & \alpha \left(\frac{\mu_h \gamma + \beta \delta}{\gamma(\mu_h + \alpha)} \right) \\ 0 & \gamma \left(1 - \left(\frac{\mu_h(\gamma \alpha + \beta \delta)}{\alpha(\gamma \mu_h + \beta \delta)} \right) \right) & -\gamma \left(\frac{\mu_h(\gamma \alpha + \beta \delta)}{\beta \gamma(\mu_h + \alpha)} \right) - \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (44)$$

Model SIR Titik Kesetimbangan untuk Kota Tomohon

Berikut ini adalah nilai parameter yang digunakan untuk menentukan model SIR titik kesetimbangan Kota Tomohon dan juga hasil dari titik-titik kesetimbangan dan nilai eigen Kota Tomohon dari tahun 2015,2016 , dan 2017 dalam tabel 5,6,7 dan 8.

Tabel 5. Nilai Parameter

Nama dari parameter	Notasi	Nilai
Proporsi perpindahan manusia terinfeksi ke manusia sembuh	γ_h	0.3288330
Tingkat Keefektifan, manusia terhadap nyamuk	$b\beta_v$	0.3750000
Tingkat Keefektifan, nyamuk terhadap manusia	$b\beta_h$	0.7500000
Rentang kehidupan manusia	μ_h	0.0000460
Rentang kehidupan nyamuk	μ_v	0.0323000

Tabel 6. Titik – titik Keseimbangan tahun 2015 dan Nilai Eigen

Kecamatan	x_0	y_0	z_0	Nilai Eigen
Tomohon Utara	1,1055934	0,0028436	0,0033027	$\lambda_1 = -0.3612$ $\lambda_2 = -0.0006 + 0.0015i$ $\lambda_3 = -0.0006 - 0.0015i$
Tomohon Timur	0,4111355	0,0001879	0,0021807	$\lambda_1 = -0.3612$ $\lambda_2 = -0.0001 + 0.0021i$ $\lambda_3 = -0.0001 - 0.0021i$
Tomohon Tengah	0,8596787	0,0002456	0,0028522	$\lambda_1 = -0.3611$ $\lambda_2 = -0.0001 + 0.0017i$ $\lambda_3 = -0.0001 - 0.0017i$
Tomohon Barat	0,5571240	0,0002069	0,0024016	$\lambda_1 = -0.3611$ $\lambda_2 = -0.0001 + 0.0019i$ $\lambda_3 = -0.0001 - 0.0019i$
Tomohon Selatan	0,8585134	0,0002456	0,0028481	$\lambda_1 = -0.3611$ $\lambda_2 = -0.0001 + 0.0017i$ $\lambda_3 = -0.0001 - 0.0017i$

Tabel 7. Titik – titik Keseimbangan tahun 2016 dan Nilai Eigen

Kecamat an	x_0	y_0	z_0	Nilai Eigen
Tomohon Utara	1,129	0,000290	0,0033758	$\lambda_1 = -0.3611$ $\lambda_2 = -0.0002 + 0.0016i$ $\lambda_3 = -0.0002 - 0.0016i$
Tomohon Timur	0,414	0,000189	0,0022002	$\lambda_1 = -0.3612$ $\lambda_2 = -0.0001 + 0.0021i$ $\lambda_3 = -0.0001 - 0.0021i$
Tomohon Tengah	0,878	0,000250	0,0029137	$\lambda_1 = -0.3611$ $\lambda_2 = -0.0001 + 0.0017i$ $\lambda_3 = -0.0001 - 0.0017i$
Tomohon Barat	0,560	0,000208	0,0024150	$\lambda_1 = -0.3611$ $\lambda_2 = -0.0001 + 0.0019i$ $\lambda_3 = -0.0001 - 0.0019i$
Tomohon Selatan	0,869	0,000248	0,0028843	$\lambda_1 = -0.3611$ $\lambda_2 = -0.0001 + 0.0017i$

Kecamatan	x_0	y_0	z_0	Nilai Eigen
				$\lambda_3 = -0.0001 - 0.0017i$

Tabel 8. Titik – titik Keseimbangan tahun 2017 dan Nilai Eigen

Kecamatan	x_0	y_0	z_0	Nilai Eigen
Tomohon Utara	1,1557320	0,0002972	0,0034522	$\lambda_1 = -0.3611$ $\lambda_2 = -0.0002 + 0.0016i$ $\lambda_3 = -0.0002 - 0.0016i$
Tomohon Timur	0,4189184	0,0001915	0,0022219	$\lambda_1 = -0.3612$ $\lambda_2 = -0.0001 + 0.0021i$ $\lambda_3 = -0.0001 - 0.0021i$
Tomohon Tengah	0,8982684	0,0002567	0,0029806	$\lambda_1 = -0.3611$ $\lambda_2 = -0.0002 + 0.0017i$ $\lambda_3 = -0.0002 - 0.0017i$
Tomohon Barat	0,5638437	0,0002094	0,0024303	$\lambda_1 = -0.3611$ $\lambda_2 = -0.0001 + 0.0019i$ $\lambda_3 = -0.0001 - 0.0019i$
Tomohon Selatan	0,8811876	0,0002518	0,0029231	$\lambda_1 = -0.3611$ $\lambda_2 = -0.0001 + 0.0017i$ $\lambda_3 = -0.0001 - 0.0017i$

Bilangan Reproduksi Dasar Penyakit DBD di Kota Tomohon

Berikut ini adalah hasil bilangan reproduksi dasar penyakit DBD di Kota Tomohon dari 5 Kecamatan yang ada di Kota Tomohon dari tahun 2015,2016, dan 2017.

Tahun 2015

Tomohon utara $R_0 = 0,06379 < 1$
 Tomohon timur $R_0 = 0,06380 < 1$
 Tomohon tengah $R_0 = 0,06378 < 1$
 Tomohon barat $R_0 = 0,06380 < 1$
 Tomohon selatan $R_0 = 0,06373 < 1$

Tahun 2016

Tomohon utara $R_0 = 0,06382 < 1$
 Tomohon timur $R_0 = 0,06382 < 1$
 Tomohon tengah $R_0 = 0,06380 < 1$
 Tomohon barat $R_0 = 0,06382 < 1$
 Tomohon selatan $R_0 = 0,06381 < 1$

Tahun 2017

Tomohon utara $R_0 = 0,06385 < 1$
 Tomohon timur $R_0 = 0,06386 < 1$
 Tomohon tengah $R_0 = 0,06383 < 1$
 Tomohon barat $R_0 = 0,06385 < 1$
 Tomohon selatan $R_0 = 0,06384 < 1$

karena hasil dari nilai R_0 untuk kecamatan tomohon utara, kecamatan tomohon timur, kecamatan tomohon tengah, kecamatan tomohon barat, dan kecamatan tomohon utara pada tahun 2015, 2016, dan 2017 semuanya kurang dari 1, maka penyakit yang ada di lima wilayah kecamatan tersebut akan berkurang.

4. KESIMPULAN DAN SARAN

Kesimpulan

Dari hasil dan pembahasan penelitian yang telah dilakukan, maka dapat disimpulkan bahwa :

- Diperoleh dua titik keseimbangan dari model matematika SIR pada model penyebaran penyakit Demam Berdarah Dengue yaitu :
 - Titik tetap bebas penyakit
 - Titik tetap endemik
- Nilai bilangan reproduksi dasar penyakit Demam Berdarah Dengue (DBD) di Kota Tomohon yang ada di lima wilayah kecamatan semuanya < 1 . Hasil ini menunjukkan penyakit Demam Berdarah Dengue (DBD) di Kota Tomohon akan berkurang. Sehingga jumlah penderita Demam Berdarah Dengue (DBD) akan berkurang dalam kurun waktu tertentu.

Saran

Penulis menyarankan kepada pembaca yang tertarik pada masalah ini untuk mengembangkan lebih lanjut. Selain itu, hasil penelitian ini diharapkan dapat membantu pemerintah selaku penentu kebijakan dalam upaya mencegah dan menanggulangi penyebaran penyakit DBD di Indonesia khususnya di Kota Tomohon Sulawesi Utara.

REFERENSI

- [1] Kementerian Kesehatan Republik Indonesia. 2019. Kasus DBD Terus Bertambah, Anung Imbau Masyarakat Maksimalkan PSN. <http://www.depkes.go.id/folder/view/01/structure-publikasi-pusdatin-buletin.html> [28 Januari 2019]
- [2] Dinas Kesehatan Provinsi Sulawesi Utara. 2019. Pemberantasan sarang nyamuk (PSN) Upaya Menurunkan Peningkatan Kasus DBD (Demam Berdarah Dengue). <http://dinkes.sulutprov.go.id/2019/01/22/dinkesda-sulut-pemberantasan-sarang-nyamuk-psn-upaya-menurunkan-peningkatan-kasus-dbd-demam-berdarah-dengue/> [28 Mei 2019]
- [3] Murray, J. D. 2002. *Mathematical Biology :An Introduction. Third Edition.* Springer-Verlag, NewYork.
- [4] Tjolleng, A. Komalig, H. Prang, J. 2013. Dinamika Perkembangan HIV/AIDS di Sulawesi Utara Menggunakan Model Persamaan Diferensial Nonlinear SIR (*Susceptible, Infectious and Recovered*). Jurnal Ilmiah Sains. 13N:9-14.

- [5] Solihin,G. 2004. Ekologi vektor demam berdarah dengue. *Warta Kesehatan TNI-AL*. 14(1):31-38.
- [6] Luknanto,D. 2003. Model Matematika. Universitas Gajah Mada, Yogyakarta.
- [7] Johnson, T. 2009. *Mathematical Modeling of Diseases. SIR Model*. University of Minnesota, Morris.
- [8] Supriatna, A.K, dan Edy, S. 2000. Model Matematika Penyebaran Penyakit Demam Berdarah. *Bionatura*. 2(3):104-116.
- [9] Braun, M. 1983. *Differential Equations and Their Applications*. Springer-Verlag, Ney York.
- [10] Anton, H. 1995. Aljabar Linear Elementer. Edisi ke-5. Pantur Silaban dan Nyoman Susila. Penerjemah. Erlangga, Jakarta.
- [11] Tu, P.N.V. 1994. *Dynamical System : An Introduction with Applications in Economics and Biology*. Springer-Verlag, New York.
- [12] Edelstein, K.L. 2005. *Mathematical Models in Biology*. Random House, New York.
- [13] Hardiningsih, A.Y. 2010. *Kajian Model Epidemik SIR Deterministik dan Stokastik pada Waktu Diskrit*. <http://digili.its.ac.id/public/ITS-Undergraduate-13427-Paper.pdf> [15 November 2016]
- [14] Side, S. Noorani, S. Md. 2013. *A SIR Model For Spread Of Dengue Fever Disease (Simulation for south Sulawesi, Indonesia and Selangor, Malaysia)*. *World Journal of Modelling and Simulation*. 9(2): 96-105.
- [15] Giesecke, J. 1994. *Modern Infectious Disease Epidemiology*. Oxford University Press, New York.

Suhendri A. Londah (landolondah@gmail.com)



Lahir di Tomohon, 01 September 1994. Menempuh pendidikan tinggi Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Sam Ratulangi Manado. Tahun 2019 adalah tahun terakhir ia menempuh studi. Makalah ini merupakan hasil penelitian skripsinya yang dipublikasikan.

Christie E.J.C Montolalu (Christelly@unsrat.ac.id)



Lahir di Tomohon, 10 Desember 1985. Pada tahun 2007 memperoleh gelar Sarjana Sains (S.Si) Matematika di Universitas Sam Ratulangi, Manado. Gelar Master Of Science (M.Sc) dari Universitas Of Queensland Australia pada tahun 2015.

Menjadi pengajar tetap di Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Sam Ratulangi Manado.

Charles E. Mongi (Charlesmongi@unsrat.ac.id)



Lahir di Tondano, 04 Januari 1984. Pada tahun 2006 memperoleh gelar Sarjana Matematika di Universitas Sam Ratulangi, Manado. Melanjutkan di Institut Pertanian Bogor tahun 2011 dan mendapatkan gelar Mmagister bidang statistika pada tahun 2014. Menjadi pengajar di Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Sam Ratulangi Manado pada tahun 2008.