d'CartesiaN

Jurnal Matematika dan Aplikasi

ISSN:2302-4224

J o u r n a l h o m e p a g e: https://ejournal.unsrat.ac.id/index.php/decartesian

Kelas Konjugat Pada Grup Simetri $S_n, (n = 3, 4, 5, 6)$ dan Grup Dihedral $D_n, (n = 3, 12, 60, 360)$

Metrosilon Ruatakurey[1], Chriestie E.J.C. Montolalu[1], Mans L. Mananohas[1*]

[1]Jurusan Matematika–Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam–Universitas Sam Ratulangi Manado, Indonesia

*Corressponding author : mansmananohas@unsrat.ac.id

A B S T R A K

Kelas konjugat merupakan salah satu teori di dalam aljabar modern. Didalam teori kelas konjugat kita dapat menbagi setiap elemen dari grup kedalam kelasnya masing-masing. Pada penelitian ini, akan diselidiki kelas konjugat pada grup Simetri dan grup Dihedral dan akan di bandingan kombinasi jumlah kelas konjugat dari grup Simetri dan grup Dihedral pada orde yang sama. Grup Simetri merupakan grup dengan kekongruenan yang bersifat invarian dan mempunyai fungsi komposisi sebagai operasinya. Grup Dihedral merupakan suatu grup dari himpunan simetri-simetri dari segi-n beraturan. Dalam penelitian ini yang akan dibuat kelas konjugat pada pada grup Simetri adalah $S_n, (n = 3,4,5,6)$ dan pada grup Dihedral adalah $D_n, (n = 3,12,60,360)$. Hasilnya, hanya S_3 dan D_3 yang memiliki kombinasi jumlah-jumlah kelas yang sama.

INFO ARTIKEL

Diterima : 4 Maret 2019

Diterima setelah revisi : 23 Maret 2019

Tersedia *online* : 31 Maret 2019

Kata Kunci:
Kelas Konjugat
Grup Simetri
Grup Dihedral

1. PENDAHULUAN

Grup merupakan salah satu struktur aljabar yang terdiri dari himpunan tak kosong yang dilengkapi operasi biner yang bersifat asosiatif, memiliki elemen identitas dan setiap elemennya memiliki invers. Apabila operasi biner pada suatu grup berlaku sifat komutatif, maka grup tersebut disebut Grup Abelian atau Grup Komutatif. Berdasarkan banyak elemen yang termuat di dalam grup, grup dibagi menjadi dua yaitu grup berhingga dan grup tak berhingga.

Secara umum, Suatu grup yang elemen-elemennya merupakan permutasi dengan operasi komposisi disebut grup permutasi. Secara khusus, jika sekumpulan permutasi dari suatu himpunan S yang tidak kosong (*nonempty*) merupakan sebuah grup dengan operasi komposisi fungsi $(\circ)$, maka S disebut grup permutasi atau disebut grup simetri pada S. Jika order dari S adalah n, maka grup simetri ini dan ditulis Sn [1].

Suatu elemen-elemen dari grup dihedral Dn adalah semua simetri dari segi-n beraturan, dan order dari Dn adalah $2n$. Tetapi grup dihedral didefinisikan hanya untuk $n \geq 3$ [1].

Sebuah refleksi terhadap sebuah garis, sama seperti refleksi terhadap garis lain. Artinya, saat refleksi terhadap 2 buah garis berbeda di sebuah bidang tidak sepenuhnya sama, tetapi memiliki hasil yang sama. Sama seperti, 2 elemen di grup S_n memiliki elemen yang berbeda tetapi mempunyai hasil yang sama (tukarkan kedua elemen dan hasilnya tidak berubah). Konsep ini membuat gagasan yang berbeda tetapi mempunyai hasil yang sama disebut konjugat [2].

Grup D_n dan S_n tidak komutatif, sehingga akan sangat menarik untuk mempelajari kelas konjugatnya. Pada penelitian ini, peneliti ingin membandingkan kombinasi jumlah kelas konjugat pada grup yang memiliki orde yang sama, dimana akan dibandingkan kelas konjugat pada grup Simetri $S_n, (n = 3,4,5,6)$ dengan kelas konjugat pada grup Dihedral $D_n, (n = 3,12,60,360)$. Disini peneliti memadankan S_3 dengan D_3, S_4 dengan D_{12}, S_5 dengan D_{60}, dan S_6 dan D_{360}.

Grup

Definisi 1 : Suatu himpunan tak kosong G bersama dengan suatu operasi $*$ pada G dinamakan Grup terhadap operasi $*$ bila memenuhi aksioma grup :

a. Tertutup untuk setiap $a, b \in G$ berlaku $a * b \in G$.
b. Asosiatif untuk setiap $a, b, c \in G$ berlaku $a * (b * c) = (a * b) * c$.
c. Identitas. Ada suatu elemn $e \in G$ sedemikian sehingga untuk semua $a \in G$ berlaku $a * e = a = e * a$. Elemen e dinamakan elemen identitas di G.
d. Invers untuk setiap $a \in G$ ada elemen $a^{-1} \in G$ yang memenuhi $a * a^{-1} = e = a^{-1} * a$. Elemen a^{-1} dinamakan invers dari elemen a [3].

Definisi 2 : Suatu grup G dengan operasi $*$ dinamakan grup Abelian atau Komutatif bila untuk setiap $a, b \in G$ berlaku $a * b = b * a$ [3].

Contoh 1 : Grup pada bilangan bulat Z.
Misalkan Z adalah himpunan bilangan bulat, maka $(Z, +)$ adalah grup karena berlaku :

a. Operasi penjumlahan biasa $(+)$ pada Z merupakan operasi biner sebab operasi biner merupakan pemetaan dari $Z \times Z \to Z$. Untuk setiap $a, b \in Z$ maka $a + b \in Z$.
b. Untuk setiap $a, b, c \in Z$ maka $a + (b + c) = (a + b) + c$. Jadi operasi $+$ bersifat asosiatif di Z.
c. Terdapat elemen identitas yaitu 0 terhadap operasi $+$ di Z sedemikian sehingga $0 \in Z$ sedemikian sehingga $a + 0 = 0 + a = a$, untuk setiap $a \in Z$.

d. Untuk $a \in Z$ terdapat a^{-1} yaitu $(-a) \in Z$ sedemikian sehingga $a + (-a) = (-a) + a = 0$ (terdapat invers di Z terhadap operasi +).

Karena himpunan Z dengan operasi penjumlahan $(+)$ memenuhi semua aksioma grup maka $(Z, +)$ adalah grup.

Grup Simetri

Misal R adalah sebarang himpunan tak kosong dan misal S_R adalah himpunan yang memuat semua fungsi-fungsi bijektif dari $R \to R$ (atau himpunan yang memut semua permutasi dari R). Himpunan S_R dengan operasi komposisi " $\circ$ " atau $(S_R, \circ)$ merupakan suatu grup. Operasi komposisi " $\circ$ " merupakan suatu operasi biner pada S_R kerana jika $x: R \to R$ dan $y: R \to R$ adalah fungsi-fungsi bijektif, maka $x \circ y$ juga merupakan suatu fungsi bijektif dari R ke R. Selanjutanya operasi " $\circ$ " adalah komposisi fungsi yang bersifat asosiatif. Identitas dari S_R merupakan permutasi 1 yang didefinisikan dengan $1(a) = a, \forall a \in R$. Untuk setiap permutasi $x: R \to R$ terdapat fungsi invers $x^{-1}: R \to R$ yang memenuhi $x \circ x^{-1} = x^{-1} \circ x = 1$. Semua aksioma grup dipenuhi oleh $(S_R, \circ)$. Grup $(S_R, \circ)$ disebut sebagai grup simetri pada himpunan R. suatu sikel atau deretan bilangan bulat yang mempresentasikan unsur-unsur dari S_n yang mempresetasikan sikelnya dari bilangan bulat. Panjang sikel adalah banyaknya bilangan bulat yang terdapat pada sikel tersebut. Suatu sikel dengan panjang t disebut sikel-t dan dua sikel dikatankan saling asing jika banyaknya bilangan bulat tidak sama [4].

Jika $a \in S_n$ adalah produk dari sikel yang saling asing dengan panjang sikel $n_1, n_2, \dots, n_r$ dimana $n_1 \leq n_2 \leq \cdots \leq n_r$ maka $n_1, n_2, \dots, n_r$ disebut sebagai tipe sikel dari a [4].

Himpunan S yang tidak kosong dengan operasi $\circ$ disebut grup jika memenuhi syarat sebagai berikut :

a. S tertutup terhadap operasi $\circ$ $\forall a, b \in S; a \circ b \in S$
b. Operasi $\circ$ bersifat asosiatif $\forall a, b, c \in S; (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$
c. Terdapat elemen identitas $\exists e \in S; a \circ e = e \circ a, \forall a \in S$
d. Setiap elemen dalam S mempunyai invers $\forall a \in S, \exists a^{-1} \in S \Rightarrow a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$.

Jika suatu grup memenuhi sifat komutatif, maka grup itu disebut Grup Abelian [1].

Contoh 2 : Grup Simetri (S_3)

Misal dieberikan himpunan tak kosong H, dengan $H = \{1,2,3\}$. Apabila H dikenai fungsi bijektif dari H ke H, maka dapat dituliskan fungsi bijektif tersebut dalam bentuk sikel berikut :

(1 2 3) (2 3)
(1 3 2) (1 3)
(1) (1 2)

Membentuk grup simetri-3

Misal $S_3 = \{(1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2), (1), (2\ 3), (1\ 3), (1\ 2)\}$. Apabila dikenai operasi komposisi " $\circ$ " pada S_3, maka

struktur $(S_3, \circ)$ membentuk grup simetri-3 yang dapat dilihat pada tabel Cayley seperti berikut :

Tabel 1. Tabel Cayley grup S_3

$\circ$	(1 2 3)	(1 3 2)	(1)	(2 3)	(1 3)	(1 2)
(1 2 3)	(1 3 2)	(1)	(1 2 3)	(1 2)	(2 3)	(1 3)
(1 3 2)	(1)	(1 2 3)	(1 3 2)	(1 3)	(1 2)	(2 3)
(1)	(1 2 3)	(1 3 2)	(1)	(2 3)	(1 3)	(1 2)
(2 3)	(1 3)	(1 2)	(2 3)	(1)	(1 2 3)	(1 3 2)
(1 3)	(1 2)	(2 3)	(1 3)	(1 3 2)	(1)	(1 2 3)
(1 2)	(2 3)	(1 3)	(1 2)	(1 2 3)	(1 3 2)	(1)

Dari tabel diatas, dapat dilihat invers dari S_3 sebagai berikut :

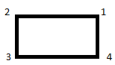
$$(1\quad 2\quad 3)^{-1} = (1\quad 3\quad 2)$$
$$(1\quad 3\quad 2)^{-1} = (1\quad 2\quad 3)$$
$$(1)^{-1} = (1)$$
$$(2\quad 3)^{-1} = (2\quad 3)$$
$$(1\quad 3)^{-1} = (1\quad 3)$$
$$(1\quad 2)^{-1} = (1\quad 2)$$

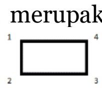
Grup Dihedral

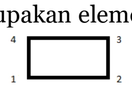
Suatu grup dari himpuanan simetri-simetri dari segi-n beraturan (poligon-n) disebut grup dihedral-$n(D_n)$. Untuk setiap $n \in Z^+, n \geq 3$. Dimisalkan D_n adalah suatu grup yang didefinisikan dengan st dengan $s, t \in D_n$ yang didapatkan dari penerapan pertama t kemudian s dalam segi-n dari simetri (simetri sebagai fungsi pada segi-n, jadi st merupakan fungsi komposisi). Jika s, t merupakan akibat permutasi dari titik-ttik yaitu σ, τ maka st merupakan akibat $\sigma \circ \tau$. Operasi biner pada D_n adalah asosiatif karena fungsi komposisi adalah asosiatif. Indntitas dari D_n merupakan identitas dari simetri yang dinotasikan dengan 1, dan invers dari $s \in D_n$ merupakan kebalikan semua putaran dari simetri s (jadi jika s merupakan efek permutasi pada titik-titik σ, s^{-1} akibat dari σ^{-1}) [5].

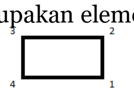
Contoh 3 : Contoh grup Dihedral D_4.

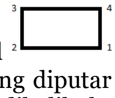
Misalkan $D_4 = \{1, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}$. Berikut ini adalah elemen dari D_4 :

(1) : merupakan elemen identitas 

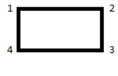
(r) : merupakan elemen diputar 90° berlawanan jarum jam 

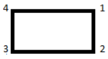
(r^2) : merupakan elemen yang diputar 180° berlawanan jarum jam 

(r^3) : merupakan elemen yang diputar 270° berlawanan jarum jam 

(s) : merupukan elemen yang dibalik berdasarkan garis refleksinya, dan pada elemen ini peneliti memilih garis refleksinya secara horizontal 

(rs) : merupakan elemen yang diputar 90° berlawanan jarum jam lalu kemudian dibalik berdasarkan garis refleksinya 

$(r^2 s)$: merupakan elemen yang diputar 180° berlawanan jarum jam lalu kemudian dibalik berdasarkan garis refleksinya 

$(r^3 s)$: merupakan elemen yang diputar 270° berlawanan jarum jam lalu kemudian dibalik berdasarkan garis refleksinya 

Jika D_4 dioperasikan dengan operasi " ∘ " maka diperoleh tabel cayley berikut :

Tabel 2. Tabel Cayley grup D_4

$\circ$	1	r	r^2	r^3	s	sr	sr^2	sr^3
1	1	r	r^2	r^3	s	sr	sr^2	sr^3
r	r	r^2	r^3	1	sr	sr^2	sr^3	s
r^2	r^2	r^3	1	r	sr^2	sr^3	s	sr
r^3	r^3	1	r	r^2	sr^3	s	sr	sr^2
s	s	sr	sr^2	sr^3	1	r	r^2	r^3
sr	sr	sr^2	sr^3	s	r	r^2	r^3	1
sr^2	sr^2	sr^3	s	sr	r^2	r^3	1	r
sr^3	sr^3	s	sr	sr^2	r^3	1	r	r^2

Kelas Konjugat

Definisi 3 : Kelas Konjugat

Suatu hubungan persamaan di suatu grup G, adalah persamaan kelas pada partisi G. persamaan kelas yang memiliki hubungan di sebut dengan kelas konjugat dari G. Jadi, kelas konjugatdari $g \in G$ adalah

$$C[g] = \{g = xgx^{-1} | x \in g\}$$

Kelas konjugat $C[a], C[b]$ sama jika dan hanya jika a dan b konjugat yaitu $gag^{-1} = b, g \in G$, dan sebaliknya. Dan untuk beberapa $x \in G$. Hubungan yang simetri, pada saat $g = yhy^{-1}$ dimana $y = x$. Ketika $xgx^{-1} = h$ dapat dikatakan bahwa x membuat g konjugat pada h [6].

Lemma 1 : Dalam suatu grup, $(xgx^{-1})^n = xg^n x^{-1}$ untuk semua bilangan bulat n [2].

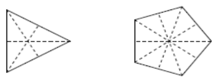
Teorema 2 : 2 elemen dari kelas konjugat memiliki orde yang sama [2].

Kebalikan dari teorema 2 : elemen dari orde yang sama pada sebuah grup tidak konjugat. Ini disebut grup Abelian, dimana elemen berbeda tidak akan pernah konjugat tetapi memiliki orde yang sama [2].

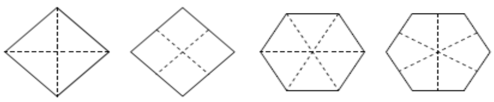
Teorema 3 : Misalkan G adalah grup dan $g, h \in G$. Jika kelas konjugat dari g dan h tumpang tindih, maka kelas konjugat adalah sama [2].

Kelas Konjugat D_n

Dalam Dn, deskripsi refleksi tergantung pada n: untuk n ganjil semua refleksi garis terlihat sama, untuk refleksi garis tengah hanyan memiliki 1 garis refleksi. Tetapi, untuk n genap garis refleksi terlihat sama semua. Lihat gambar 1 dan 2 [7].



Gambar 1. Garis refleksi untuk $n = 3$ dan $n = 5$



Gambar 2. Garis refleksi untuk $n = 4$ dan $n = 6$

Berikut ini merupakan teorema untuk n genap dan n ganjil pada grup D_n untuk mencari kelas konjugatnya.

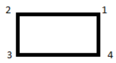
Teorema 4 : Kelas konjugat di Grup dihedral D_n adalah sebagai berikut :

1. Untuk n ganjil
   - Elemen identitas : (1).
   - $(n-1)/2$, kelas konjugat 2 elemen : $\{r^{\pm 1}\}, \{r^{\pm 2}\} \dots, \{r^{\pm(n-1)2}\}$.
   - Semua refleksi : $\{r^i s: 0 \leq i \leq n-1\}$.

2. Untuk n genap
   - Kelas konjugat untuk 1 elemen : $\{1\}, \left\{r^{\frac{n}{2}}\right\}$.
   - $\frac{n}{2} - 1$, kelas konjugat 2 elemen : $\{r^{\pm 1}\}, \{r^{\pm 2}\} \dots, \left\{r^{\pm(\frac{n}{2}-1)}\right\}$.
   - Refleksi terbagi dalam 2 kelas konjugat : $\left\{r^{2i}s : 0 \leq i \leq \frac{n}{2} - 1\right\}$ dan $\left\{r^{2i+1}s : 0 \leq i \leq \frac{n}{2} - 1\right\}$ [7].

Contoh 4 : Kelas Konjugat Pada Grup D_4.

1. Pada D_4 memiliki 5 kelas konjugat :
   Dengan cara menggunakan Teorema 4 dengan arah rotasi berlawan jarum jam dan garis refleksinya horizontal.
   Untuk 1 elemnen pada D_4 yaitu : (1) dan $\left(r^{\frac{n}{2}} = r^2\right)$

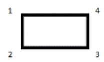
   (1) : 

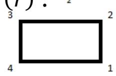
Konjugat pada dirinya sendiri.

   (r^2) : 

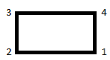
Konjugat pada dirinya sendiri.

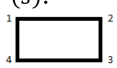
   Untuk 2 elemen $\left(\frac{n}{2} - 1 = \frac{4}{2} - 1 = 1\right)$, jadi kelas konjugat pada D_4 yang memiliki 2 elemen hanya 1 kelas.

   (r) : 

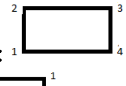
konjugat dengan (r^3) :


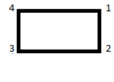
   Untuk $r^{2i}s : 0 \leq i \leq \frac{n}{2} - 1 = 0 \leq i \leq 1$
   $(0) = r^{2(0)}s = s$
   $(1) = r^{2(1)}s = r^2 s$

   (s): 

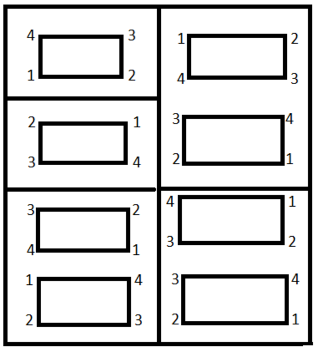
konjugat dengan $(r^2 s)$:


   Untuk $r^{2i+1}s : 0 \leq i \leq \frac{n}{2} - 1 = 0 \leq i \leq 1$
   $(0) = r^{2(0)+1}s = rs$
   $(1) = r^{2(1)+1}s = r^3 s$

   (rs) : 

konjugat dengan $(r^3 s)$:


   Berikut ini adalah gambar kelas konjugat dari grup D_4:



Gambar 3. Kelas Konjugat Grup D_4

$$\{1\}, \{r^2\}, \{s, r^2s\}, \{r, r^3\}, \{rs, r^3s\}$$

2. METODOLOGI PENELITIAN

2.1. Waktu dan Tempat Penelitian

Waktu : bulan desember 2018 – februari 2019
Tempat : Jurusan Matematika Fakultas Matemtika dan Ilmu Pengetahuan Alam UNSRAT.

2.2. Metode Penelitian

Metode yang digunakan di dalam penelitian ini yaitu studi pustaka tentang teori kelas konjugat pada grup Dihedral dan Simetri.

2.3. Tahap Penelitian

Tahapan pada penilitian ini yaitu :

a. Akan dibuat kelas grup Simetri $S_n, (n = 3,4,5,6)$ dan grup Dihedral $D_n, (n = 3,12,60,360)$ menggunakan teori Kelas Konjugat.
b. Akan dibandingkan kombinasi jumlah kelas konjugat dari grup Simetri $S_n, (n = 3,4,5,6)$ dan grup Dihedral $D_n, (n = 3,12,60,360)$.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Berikut ini merupakan hasil dan pembahasan dari kelas konjugat grup Simetri $S_n, (n = 3,4,5,6)$ dan grup Dihedral $D_n, (n = 3,12,60,360)$ dan perbandingan kombinasi jumlah kelas konjugatnya :

Kelas Konjugat Pada Grup Dihedral $D_n, (n = 3, 12, 60, 360)$

Untuk mencari kelas konjugat pada grup $D_n, (n = 3,12,60,360)$ menggunakan Teorema 4 : kelas konjugat pada grup Dihedral D_n. Berdasarkan Teorema tersebut dapat di Ketahui Kelas dari setiap elemen-elemen yang ada pada grup D_n. Berikut ini merupakan kelas konjugat dari grup Dihedral untuk $D_n, (n = 3,12,60,360)$:

- Kelas konjugat pada grup D_3
$$\{1\}, \{r, r^2\}, \{s, rs, r^2s\}$$
- Kelas konjugat pada grup D_{12}
$$\{1\}, \{r^6\}, \{r, r^{11}\}, \{r^2, r^{10}\}, \{r^3, r^9\}\{, r^4, r^8\}, \{r^5, r^7\},$$
$$\{s, r^2s, r^4s, r^6s, r^8s, r^{10}s\}, \{rs, r^3s, r^5s, r^7s, r^9s, r^{11s}\}$$
- Kelas konjugat pada Grup D_{60}

$$\{1\}, \{r^{30}\}, \{r, r^{59}\}\{r^2, r^{58}\}, \{r^3, r^{57}\}, \{r^4, r^{56}\}, \{r^5, r^{55}\}, \{r^6, r^{54}\},$$
$$\{r^7, r^{53}\}, \{r^8, r^{52}\}, \{r^9, r^{51}\}, \{r^{10}, r^{50}\}\{r^{11}, r^{49}\}, \{r^{12}, r^{48}\}, \{r^{13}, r^{47}\},$$
$$\{r^{14}, r^{46}\}, \{r^{15}, r^{45}\}\{r^{16}, r^{44}\}, \{r^{17}, r^{43}\}, \{r^{18}, r^{42}\}, \{r^{19}, r^{41}\}, \{r^{20}, r^{40}\},$$
$$\{r^{21}, r^{39}\}, \{r^{22}, r^{38}\}, \{r^{23}, r^{37}\}, \{r^{24}, r^{36}\}, \{r^{25}, r^{35}\}, \{r^{26}, r^{34}\}, \{r^{27}, r^{33}\},$$
$$\{r^{28}, r^{32}\}, \{r^{29}, r^{31}\},$$
$$\left\{\begin{matrix} s, r^2s, r^4s, r^6s, r^8s, r^{10}s, r^{12}s, r^{14}s, r^{16}s, r^{18}s, r^{20}s, r^{22}s, r^{24}s, r^{26}s, r^{28}s, r^{30}s, \\ r^{32}sr^{34}s, r^{36}s, r^{38}s, r^{40}s, r^{42}s, r^{44}s, r^{46}s, r^{48}s, r^{50}s, r^{52}s, r^{54}s, r^{56}s, r^{58}s \end{matrix}\right\}$$
$$\left\{\begin{matrix} rs, r^3s, r^5s, r^7s, r^9s, r^{11}s, r^{13}s, r^{15}s, r^{17}s, r^{19}s, r^{21}s, r^{23}s, r^{25}s, r^{27}s, r^{29}s, r^{31}s, \\ r^{33}s, r^{35}s, r^{37}s, r^{39}s, r^{41}s, r^{43}s, r^{45}s, r^{47}s, r^{49}s, r^{51}s, r^{53}s, r^{55}s, r^{57}s, r^{59}s \end{matrix}\right\}$$

- Kelas konjugat pada grup D_{360}.

$$\{1\}, \{r^{180}\}, \{r, r^{359}\}\{r^2, r^{358}\}, \{r^3, r^{357}\}, \{r^4, r^{356}\}, \{r^5, r^{355}\}, \{r^6, r^{354}\},$$
$$\{r^7, r^{353}\}, \{r^8, r^{352}\}, \{r^9, r^{351}\}, \{r^{10}, r^{350}\}\{r^{11}, r^{349}\}, \{r^{12}, r^{348}\}, \{r^{13}, r^{347}\},$$
$$\{r^{14}, r^{346}\}, \{r^{15}, r^{345}\}\{r^{16}, r^{344}\}, \{r^{17}, r^{343}\}, \{r^{18}, r^{342}\}, \{r^{19}, r^{341}\}, \{r^{20}, r^{340}\},$$
$$\{r^{21}, r^{339}\}, \{r^{22}, r^{338}\}, \{r^{23}, r^{337}\}, \{r^{24}, r^{336}\}, \{r^{25}, r^{335}\}, \{r^{26}, r^{334}\}, \{r^{27}, r^{333}\},$$
$$\{r^{28}, r^{332}\}, \{r^{29}, r^{331}\}, \{r^{30}, r^{330}\}, \{r^{31}, r^{329}\}, \{r^{32}, r^{328}\}, \{r^{33}, r^{327}\}, \{r^{34}, r^{326}\},$$
$$\{r^{35}, r^{325}\}, \{r^{36}, r^{324}\}, \{r^{37}, r^{323}\}, \{r^{38}, r^{322}\}\{r^{39}, r^{321}\}, \{r^{40}, r^{320}\}, \{r^{41}, r^{319}\},$$
$$\{r^{42}, r^{318}\}, \{r^{43}, r^{317}\}\{r^{44}, r^{316}\}, \{r^{45}, r^{315}\}, \{r^{46}, r^{314}\}, \{r^{47}, r^{313}\}, \{r^{48}, r^{312}\},$$
$$\{r^{49}, r^{311}\}, \{r^{50}, r^{300}\}, \{r^{51}, r^{299}\}, \{r^{52}, r^{298}\}, \{r^{53}, r^{297}\}, \{r^{54}, r^{296}\}, \{r^{55}, r^{295}\},$$
$$\{r^{56}, r^{294}\}, \{r^{57}, r^{293}\}\{r^{58}, r^{292}\}, \{r^{59}, r^{291}\}, \{r^{60}, r^{290}\}, \{r^{61}, r^{289}\}, \{r^{62}, r^{288}\},$$
$$\{r^{63}, r^{287}\}, \{r^{64}, r^{286}\}, \{r^{65}, r^{285}\}, \{r^{66}, r^{284}\}, \{r^{67}, r^{283}\}, \{r^{68}, r^{282}\}, \{r^{69}, r^{281}\},$$
$$\{r^{70}, r^{280}\}, \{r^{71}, r^{279}\}, \{r^{72}, r^{278}\}, \{r^{73}, r^{277}\}, \{r^{74}, r^{276}\}, \{r^{75}, r^{275}\}, \{r^{76}, r^{274}\}$$
$$\{r^{77}, r^{273}\}, \{r^{78}, r^{272}\}, \{r^{79}, r^{271}\}, \{r^{80}, r^{270}\}\{r^{81}, r^{269}\}, \{r^{82}, r^{268}\}, \{r^{83}, r^{267}\},$$
$$\{r^{84}, r^{266}\}, \{r^{85}, r^{265}\}\{r^{86}, r^{264}\}, \{r^{87}, r^{263}\}, \{r^{88}, r^{262}\}, \{r^{89}, r^{261}\}, \{r^{90}, r^{260}\},$$
$$\{r^{91}, r^{259}\}, \{r^{92}, r^{258}\}, \{r^{93}, r^{257}\}, \{r^{94}, r^{256}\}, \{r^{95}, r^{255}\}, \{r^{96}, r^{254}\}, \{r^{97}, r^{253}\}$$
$$\{r^{98}, r^{252}\}, \{r^{99}, r^{251}\}, \{r^{100}, r^{250}\}, \{r^{101}, r^{249}\}\{r^{102}, r^{248}\}, \{r^{103}, r^{247}\},$$
$$\{r^{104}, r^{246}\}, \{r^{105}, r^{245}\}, \{r^{106}, r^{244}\}\{r^{107}, r^{243}\}, \{r^{108}, r^{242}\}, \{r^{109}, r^{241}\},$$
$$\{r^{110}, r^{240}\}, \{r^{111}, r^{239}\}, \{r^{112}, r^{238}\}, \{r^{113}, r^{237}\}, \{r^{114}, r^{236}\}, \{r^{115}, r^{235}\},$$
$$\{r^{116}, r^{234}\}, \{r^{117}, r^{233}\}, \{r^{118}, r^{232}\}, \{r^{119}, r^{231}\}, \{r^{120}, r^{230}\}, \{r^{121}, r^{229}\},$$
$$\{r^{122}, r^{228}\}, \{r^{123}, r^{227}\}, \{r^{124}, r^{226}\}, \{r^{125}, r^{225}\}\{r^{126}, r^{224}\}, \{r^{125}, r^{225}\},$$
$$\{r^{126}, r^{224}\}, \{r^{127}, r^{223}\}\{r^{128}, r^{222}\}, \{r^{129}, r^{221}\}, \{r^{130}, r^{220}\}, \{r^{131}, r^{219}\},$$
$$\{r^{132}, r^{218}\}\{r^{133}, r^{217}\}, \{r^{134}, r^{216}\}, \{r^{135}, r^{215}\}, \{r^{136}, r^{214}\}, \{r^{137}, r^{213}\},$$
$$\{r^{138}, r^{212}\}, \{r^{139}, r^{211}\}, \{r^{140}, r^{210}\}, \{r^{141}, r^{209}\}, \{r^{142}, r^{208}\}, \{r^{143}, r^{207}\},$$
$$\{r^{144}, r^{206}\}, \{r^{145}, r^{205}\}, \{r^{146}, r^{204}\}, \{r^{147}, r^{203}\}, \{r^{148}, r^{202}\}\{r^{149}, r^{201}\},$$
$$\{r^{150}, r^{200}\}, \{r^{151}, r^{199}\}, \{r^{152}, r^{198}\}, \{r^{153}, r^{197}\}\{r^{154}, r^{196}\}, \{r^{155}, r^{195}\},$$
$$\{r^{156}, r^{194}\}, \{r^{157}, r^{193}\}, \{r^{158}, r^{192}\}, \{r^{159}, r^{191}\}, \{r^{160}, r^{190}\}, \{r^{161}, r^{189}\},$$
$$\{r^{162}, r^{188}\}, \{r^{163}, r^{187}\}, \{r^{164}, r^{186}\}, \{r^{165}, r^{185}\}, \{r^{166}, r^{184}\}, \{r^{167}, r^{183}\},$$
$$\{r^{168}, r^{182}\}, \{r^{169}, r^{181}\},$$
$$\left\{\begin{matrix} s, r^2s, r^4s, r^6s, r^8s, r^{10}s, r^{12}s, r^{14}s, r^{16}s, r^{18}s, r^{20}s, r^{22}s, r^{24}s, r^{26}s, r^{28}s, \\ r^{30}s, r^{32}sr^{34}s, r^{36}s, r^{38}s, r^{40}s, r^{42}s, r^{44}s, r^{46}s, r^{48}s, r^{50}s, r^{52}s, r^{54}s, r^{56}, \\ r^{58}s, r^{60}s, r^{62}s, r^{64}s, r^{66}s, r^{68}s, r^{70}s, r^{72}s, r^{74}s, r^{76}s, r^{78}s, r^{80}s, r^{82}s, r^{84}s, \\ r^{86}s, r^{88}s, r^{90}s, r^{92}s, r^{94}s, r^{96}s, r^{98}s, r^{100}s, r^{102}s, r^{104}s, r^{106}s, r^{108}s, r^{110}s, \\ r^{112}s, r^{114}s, r^{116}s, r^{118}s, r^{120}s, s, r^{122}s, r^{124}s, r^{126}s, r^{128}s, r^{130}s, r^{132}s, \\ r^{134}s, r^{136}s, r^{138}s, r^{140}s, r^{142}s, r^{144}s, r^{146}s, r^{148}s, r^{150}s, r^{152}s, r^{154}s, r^{156}s, \\ r^{158}s, r^{160}s, r^{162}s, r^{164}s, r^{166}s, s, r^{168}s, r^{170}s, r^{172}s, r^{174}s, r^{176}s, r^{178}s \end{matrix}\right\}$$
$$\left\{\begin{matrix} rs, r^3s, r^5s, r^7s, r^9s, r^{11}s, r^{13}s, r^{15}s, r^{17}s, r^{19}s, r^{21}s, r^{23}s, r^{25}s, r^{27}s, r^{29}s, \\ r^{31}s, r^{33}s, r^{35}s, r^{37}s, r^{39}s, r^{41}s, r^{43}s, r^{45}s, r^{47}s, r^{49}s, r^{51}s, r^{53}s, r^{55}s, r^{57}s, \\ r^{59}s, r^{61}s, r^{63}s, r^{65}s, r^{67}s, r^{69}s, r^{71}s, r^{73}s, r^{75}s, r^{77}s, r^{79}s, r^{81}s, r^{83}s, r^{85}s, \\ r^{87}s, r^{89}s, r^{91}s, r^{93}s, r^{95}s, r^{97}s, r^{99}s, r^{101}s, r^{103}s, r^{105}s, r^{107}s, r^{109}s, r^{111}s, \\ r^{113}s, r^{115}s, r^{117}s, r^{119}s, r^{121}s, r^{123}s, r^{125}s, r^{127}s, r^{129}s, r^{131}s, r^{133}s, r^{135}s, \\ r^{137}s, r^{139}s, r^{141}s, r^{143}s, r^{145}s, r^{147}s, r^{149}s, r^{151}s, r^{153}s, r^{155}s, r^{157}s, r^{159}s, \\ r^{161}s, r^{163}s, r^{165}s, r^{167}s, r^{169}s, r^{171}s, r^{173}s, r^{175}s, r^{177}s, r^{179}, \end{matrix}\right\}$$

Kelas Konjugat Pada Grup Simetri $S_n, (n = 3, 4, 5, 6)$

Hasil berdasarkan [2].

Tabel 3. Kelas konjugat pada grup S_3

S_3			
Elemen	(1)	(123)	(12)
Kelas konjugat	1	2	3

Untuk mencari kelas konjugat dari grup Simetri S_3. Yaitu, menggunkan Definisi kelas konjugat. x konjugat y apabila $x = hyh^{-1}$.

Contoh 5 : Cara mencari kelas konjugat pada S_3.

Tabel 4. Cara Mencari Kelas konjugat pada S_3

Cara	Elemen kelas konjugat
$\begin{vmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{vmatrix} =$ $\begin{vmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{vmatrix}$ $= \begin{vmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{vmatrix}$ $= \begin{vmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{vmatrix}$ Elemen ini konjugat dengn dirinya sendiri	$\begin{vmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{vmatrix}$
$\begin{vmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{vmatrix} =$ $\begin{vmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{vmatrix}$ $= \begin{vmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{vmatrix}$ $= \begin{vmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{vmatrix} =$ $\begin{vmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{vmatrix}$ $= \begin{vmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{vmatrix}$ $= \begin{vmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{vmatrix}$ Elemen ini konjugat dengan dirinya sendiri dan konjugat dengan elemen $\begin{vmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1&2\\3&1\end{vmatrix}$
$\begin{vmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{vmatrix} =$ $\begin{vmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{vmatrix}$ $= \begin{vmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{vmatrix}$ $= \begin{vmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{vmatrix} =$ $\begin{vmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{vmatrix}$ $= \begin{vmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{vmatrix}$ $= \begin{vmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{vmatrix} =$ $\begin{vmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{vmatrix}$ $= \begin{vmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{vmatrix}$ $= \begin{vmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{vmatrix}$ Elemen ini konjugat dengan dirinya sendiri, $\begin{vmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{vmatrix}$ dan $\begin{vmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{vmatrix}$.	$\begin{vmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{vmatrix}$

Gunakan Cara yang sama untuk mencari $S_n, (n = 4,5,6)$

Tabel 5. Kelas konjugat pada grup S_4

S_4					
Elemen	(1)	(12)(34)	(12)	(1234)	(123)
Kelas Konjugat	1	3	6	6	8

Tabel 6. Kelas konjugat pada grup S_5

S_5							
Elemen	(1)	(12)	(12)(34)	(123)	(12)(345)	(12345)	(1234)
Kelas Konjugat	1	10	15	20	20	24	30

Tabel 7. Kelas konjugat pada grup S_6

S_6					
Elemen	(1)	(12)	(12)(34)(56)	(123)	(123)(456)
Kelas Konjugat	1	15	15	40	40
Elemen	(12)(34)	(1234)	(12)(3456)	(123456)	(12)(345)
Kelas Konjugat	45	90	90	120	120
Elemen	(12345)				
Kelas Konjugat	144				

Kombinasi Jumlah Kelas Konjugat Grup $D_n, (n = 3,12,60,360)$ dan Grup $S_n, (n = 3,4,5,6)$.

Jika sudah di dapat kelas kelas konjugat dari grup Simetri $S_n, (n = 3,4,5,6)$ dan grup $D_n, (n = 3,12,60,360)$. Maka akan di bandingkan kombinasi jumlah kelas konjugat dari kedua grup ini. Berikut ini merupakan perbandingan kombinasi jumlah kelas konjugat dari kedua grup tersebut :

Tabel 8. kardinalitas kelas pada grup D_3 dan S_3

Kardinalitas kelas (k)	Banyak kelas dengan kardinalitas k pada D_3	Banyak kelas dengan kardinalitas k pada S_3
1	1	1
2	1	1
3	1	1

Disini D_3 dan S_3 memiliki kombinasi jumlah kelas yang sama.

Tabel 9. kardinalitas kelas pada grup D_{12} dan S_4

Kardinalitas kelas (k)	Banyak kelas dengan kardinalitas k pada D_{12}	Banyak kelas dengan kardinalitas k pada S_4
1	2	1
2	5	-
3	-	1
6	2	2
8	-	1

Disini D_{12} dan S_4 memiliki kombinasi jumlah kelas yang berbeda.

Tabel 10. kardinalitas kelas pada grup D_{60} dan S_5

Kardinalitas kelas (k)	Banyak kelas dengan kardinalitas k pada D_{60}	Banyak kelas dengan kardinalitas k pada S_5
1	2	1
2	29	-
10	-	2
15	2	-
20	-	2
24	-	1
30	2	1

Disini D_{60} dan S_5 memiliki kombinasi jumlah kelas yang berbeda.

Tabel 11. kardinalitas kelas pada grup D_{360} dan S_6

Kardinalitas kelas (k)	Banyak kelas dengan kardinalitas k pada D_{360}	Banyak kelas dengan kardinalitas k pada S_6
1	2	1
2	179	-
15	-	2
40	-	2
45	-	1
90	-	2
120	-	2
144	-	1
180	2	-

Disini D_{360} dan S_6 memiliki kombinasi jumlah kelas yang berbeda.

Jadi, untuk $S_n, \{n = 3,4,5,6\}$. Hanya S_3 yang memiliki kombinasi jumlah kelas konjugat yang sama dengan D_3. Sementara $S_4, S_5, \& S_6$ tidak memiliki kombinasi jumlah kelas konjugat yang sama pada grup Dihedral.

4. PENUTUP

4.1. Kesimpulan

Dengan mengunakan teori kelas konjugat maka dapat diketahui perbandingn kombinasi jumlah Kelas Konjugat Dari Grup Simetri $S_n, (n = 3,4,5,6)$ dan Grup $D_n, (n = 3,12,60,360)$. Jadi kedua Grup ini mempunyai kombinasi jumlah kelas konjugatnya sama hanya pada saat $n = 3$. Yaitu pada Grup S_3 memiliki 3 kelas, dimana kombinasi jumlah kelas-kelasnya terdapat 1 elemen pada 1 kelas, 2 elemen pada kelas lainnya, dan 3 elemen pada kelas yang lainnya. Begitupun sama dengan kelas Konjugat pada Grup Dihedral D_3.

Untuk $S_4 \,\&\, D_{12}$, $S_5 \,\&\, D_{60}$, $S_6 \,\&\, D_{360}$ memiliki kombinasi jumlah kelas konjugat yang berbeda.

4.2. Saran

Penelitian hanya membandingkan kelas konjugat pada Grup $S_n, (n = 3,4,5,6)$ dengan kelas konjugat pada orde yang sama di Grup Dihedral, dimana $D_n, (n = 3,12,60,360)$. Perlu dilakukan penelitian lanjutan untuk menjawab pertanyaan tentang eksistensi dari grup simetri S_n dengan $n > 6$ yang memiliki kombinasi jumlah kelas konjugat yang sama dengan suatu grup D_n.

REFERENSI

[1] Darminto, B.P. 2014. Grup Permutasi, abstr. Hlm 43. Jurusan Matematika KPIK Universitas Muhammadiyah Purworejo.

[2] Conrad, K. 2015 (a). CONJUGATION IN A GROUP. *jurnal of scientific*. New York.

[3] Subiono. 2016. Aljabar : Sebagai suatu Pondasi Matematika . Edisi Ke-2. Jurusan Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.

[4] Irnawati. 2016. Graf Konjugasi Dari Subgrup di Grup Simetri [Skripsi]. Jurusan Matematika Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

[5] Farida, L. 2011. Isomorfisma Subgrup Simetri dan BAngun Ruang Beraturan dengan Grup Dihedral [Skripsi]. Jurusan Matematika Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

[6] Ismail, M. M., and M. A. Bashir. 2015. Utility of irreducible group representations in differential equations. *International Journal of Scientific and Research Publications*. **5(7):** 1-5.

[7] Conrad, K. 2015 (b). DIHEDRAL GROUP. *jurnal of scientific*. New York.

Metrosilon Ruatakurey (metrosilonr@gmail.com)

Lahir di Makbon, Papua Barat pada tanggal 26 Juni 1998. Menempuh pendidikan tinggi Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Sam Ratulangi Manado. Tahun 2018 adalah tahun terakhir ia menempuh studi. Makalah ini merupakan hasil penelitian skripsinya yang dipublikasikan.

Chriestie E.J.C. Montolalu (Chriestelly@yahoo.com)

Lahir pada tanggal 10 Desember 1985. Pada tahun 2007 mendapatkan gelar Sarjana Sains (S.Si) yang diperoleh dari Universitas Sam Ratulangi Manado. Gelar Master Of Science (M.Sc) diperoleh dari Universitas Of Queensland Australia pada tahun 2015. Ia bekerja di UNSRAT di Program Studi Matematika sebagai pengajar akademik tetap UNSRAT.

Mans L. Mananohas (mansmananohas.unsrat.ac.id)

Pada tahun 2006, memperoleh gelar sarjana di Program Studi Matematika, Universitas Sam Ratulangi. Gelar Magister Sains diperoleh dari Institut Teknologi Bandung pada tahun 2013. Menjadi dosen di Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Sam Ratulangi Manado sejak tahun 2009 sampai sekarang dengan bidang keahlian yang ditekuni diantaranya; Analisis dan Aljabar.