d'CartesiaN

Jurnal Matematika dan Aplikasi

p-ISSN:2302-4224 e-ISSN: 2685-1083

Journal homepage: https://ejournal.unsrat.ac.id/index.php/decartesian

Derajat *Laplacian* dari Graf Lengkap, Graf Bipartisi Komplit, Graf Matahari dan Graf yang memiliki $n-1$ Derajat berbeda

Yohanes Imanuel Runtunuwu[1], Mans Mananohas[1], Chriestie Montolalu[1*]

[1]Jurusan Matematika–Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam–Universitas Sam Ratulangi Manado, Indonesia

[*]Corressponding author : chriestelly@unsrat.ac.id

ABSTRAK

Graf didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E), yang dalam hal ini V adalah himpunan simpul-simpul (*vertices*) dan E adalah himpunan sisi (*edges*). Perkembangan dari Teori Graf dapat dihubungkan dengan cabang ilmu Matematika yang lain seperti Aljabar yang menarik untuk dibahas. Sebuah graf dapat direpresentasikan ke dalam Matriks *Laplacian* (pengurangan matriks derajat dan matriks ketetanggaan) yang dapat dihitung nilai eigennya. Tujuan penelitian ini adalah untuk membuktikan pada graf terhubung (*connected graph*) pertidaksamaan $c_k(G) \geq d_k(G)$, bilangan $c_k = c_k(G) = t_k + k - 2$ adalah derajat *Laplacian* terbesar ke-k pada matriks *Laplacian*, t_k merupakan nilai Eigen terbesar ke-k pada matriks *Laplacian* dan $d_k(G)$ merupakan derajat terbesar ke-k dari graf terhubung G sehingga berlaku untuk $k = 1,2, \dots, n-1$.. Penelitian ini dilakukan menggunakan studi pustaka. Hasil penelitian diketahui bahwa $c_k(G) \geq d_k(G)$ berlaku untuk $k = 1,2, \dots, n-1$ pada batasan graf terhubung.

INFO ARTIKEL

Diterima : 22 Februari 2021

Diterima setelah revisi : 10 Juli 2021

Tersedia *online* : 11 Juli 2021

Kata Kunci:
Graf Bipartisi Komplit
Graf Lengkap
Graf Matahari
Matriks *Laplacian*
Nilai Eigen

ABSTRACT

Graph is defined as a set pair (V, E), where V is the set of vertices and E is the set of edges. The development of Graph Theory can be linked to other branches of Mathematics such as Algebra which is interesting to discuss. A graph can be represented in a Laplacian Matrix (subtraction matrix of degree and adjacency matrix) where its eigenvalues can be calculated. The purpose of this research is to prove the inequality in a connected graph $c_k(G) \geq d_k(G)$, number $c_k = c_k(G) = t_k + k - 2$ is k-th Laplacian degree on Laplacian matrix, t_k is k-th Eigenvalue on Laplacian matrix and $d_k(G)$ is k-th degree of connected graph G such that it applies for $k = 1,2, \dots, n-1$. This research was conducted using literature study. From the research results it is known that $c_k(G) \geq d_k(G)$ applies to $k = 1,2, \dots, n-1$ on the abutment of connected graph.

ARTICLE INFO

Accepted : 22 February 2021

Accepted after revision : 10 July 2021

Available online : 11 July 2021

Keywords:
Complete Bipartite Graph
Complete Graph
Eigenvalue
Laplacian Matrix
Sun Graph

1. PENDAHULUAN

Salah satu tujuan di dalam pembelajaran adalah kemampuan untuk memecahkan permasalahan. Pemecahan masalah tersebut meliputi kemampuan perumusan masalah matematika dalam kehidupan sehari-hari [1]. Teori Graf digunakan pertama kali dalam masalah jembatan *Königsberg* pada tahun 1736 yang merupakan salah satu permasalahan dalam Matematika. Masalah ini terjadi di sebelah timur negara bagian *Prussia*, Jerman yakni kota *Königsberg*, sekarang dikenal dengan kota *Kaliningrad*, di kota tersebut mengalir sungai *Pregal* yang mengitari pulau *Kneiphof* lalu bercabang yang terbelah menjadi dua buah anak sungai [2].

Graf dinotasikan dengan $G = (V(G), E(G))$ yang terdiri dari dua *finite set*, V dan E. Simpul atau *vertex* merupakan unsur-unsur dari V. Sedangkan, sisi atau *edges* merupakan unsur-unsur dari E [3].

Pengembangan dari teori Graf dapat dihubungkan dengan ilmu-ilmu cabang matematika yang lain, contohnya Aljabar menjadi topik *Algebraic Graph Theory* yang menarik untuk dibahas. Representasi graf pada suatu matriks merupakan kajian dari graf yang berdasarkan sifat Aljabar dan sifat Graf [4].

Matriks *Laplacian* merupakan salah satu representasi yang dapat dibuat dari graf. Jika $D(G)$ adalah *diagonal matrix* dengan entri-entri pada diagonal utamanya merupakan *degree* dari *vertex* v_i pada graf G, dan $A(G)$ adalah *adjency matrix* dari graf G, maka matriks *Laplacian* $L(G)$ adalah matriks persegi yang didapat dari *diagonal matrix* dikurangi *adjency matrix*. Nilai eigen (*eigenvalue*) dapat diperoleh dari matriks *Laplacian* apabila dicari polinomial karakteristik dari Matriks *Laplacian* tersebut [5].

Salah satu penerapan Nilai Eigen pada Matriks *Laplacian* adalah untuk memperoleh Spektrum Graf. Dalam penelitian ini, membahas tentang masalah Derajat *Laplacian* dari sebuah Graf yang merupakan bagian dari Spektrum Graf. Pada jurnal "*The Laplacian Spectrum of a Graph II*" terdapat pengantar mengenai masalah pertidaksamaan yang telah diteliti yaitu *Corollary* $\lambda_1(G) \geq d_1(G) + 1$ [6]

Masalah utama dari penelitian ini berasal dari konjektur yang dikemukakan dalam jurnal *On the third largest Laplacian eigenvalue of a graph* yang merupakan penelitian lanjutan dari penelitian oleh [6]. *Conjecture* tersebut adalah : "Misalkan G adalah graf terhubung dengan $n\ vertex$, maka $\lambda_k(G) \geq d_k(G) - k + 2, (1 \leq k \leq n-1)$" [7].

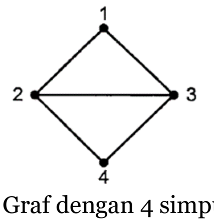
Kemudian, konjektur ini ditulis ulang menjadi : "Misalkan G adalah graf terhubung dengan $n\ vertex$, maka $c_k(G) \geq d_k(G)$, untuk $k = 1,2,\ldots,n-1$" yang menjadi objek penelitian [8]. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk membuktikan $c_k(G) \geq d_k(G)$ pada graf terhubung (*connected graph*) sehingga berlaku untuk $k = 1,2,\ldots,n-1$.

Definisi Graf

Definisi

Graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E), dapat dituliskan dengan notasi $G = (V, E)$, yang dalam hal ini V adalah himpunan simpul kosong dari simpul-simpul (*vertices* atau *node*) dan E adalah himpunan sisi (*edges* atau *arcs*) yang menghubungkan sepasang simpul.

Definisi menyatakan bahwa V tidak boleh kosong, sedangkan E boleh kosong. Jadi, sebuah graf dimungkinkan tidak mempunyai sisi satu buah pun, tetapi simpulnya harus ada, minimal satu. Graf yang hanya mempunyai satu buah simpul tanpa sebuah sisi pun dinamakan Graf Trivial [2].

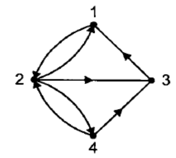


Gambar 1. Graf dengan 4 simpul dan 5 sisi

Graf Tak-Berarah dan Graf Berarah

Graf yang sisinya tidak mempunyai orientasi arah disebut graf tak-berarah. Pada graf tak-berarah, urutan pasangan simpul yang dihubungkan oleh sisi tidak diperhatikan. Jadi $(u, v) = (v, u)$ adalah sisi yang sama. Graf pada Gambar 1 adalah graf tak-berarah. [8].

Graf yang setiap sisinya diberikan orientasi arah disebut sebagai graf berarah. Pada graf berarah; (u, v) dan (v, u) menyatakan dua buah busur (sisi berarah) yang berbeda, dengan kata lain $(u, v) \neq (v, u)$. Untuk busur (u, v) simpul u dinamakan simpul asal (*initial vertex*) dan simpul v dinamakan simpul terminal (*terminal vertex*), graf pada gambar 2 adalah contoh graf berarah [2].

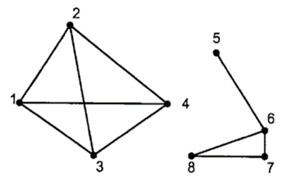


Gambar 2. Graf Berarah

Graf Terhubung (*Connected Graph*)

Definisi

Graf tak-berarah G disebut graf terhubung (*connected graph*), jika untuk setiap pasang simpul u dan v di dalam himpunan V terdapat lintasan dari u ke v (yang juga harus berarti ada lintasan dari u ke v). Jika tidak, maka G disebut Graf Tak-Terhubung (*Disconnected Graph*). Graf pada Gambar 1 adalah Graf Terhubung, sedangkan Graf pada Gambar 3 adalah Graf Tak-Terhubung [2].

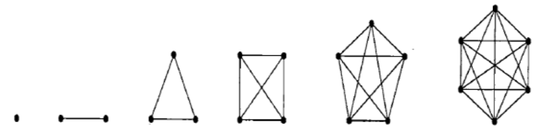


Gambar 3. Graf Tak-Terhubung

Graf Lengkap (*Complete Graph*)

Definisi

Graf Lengkap adalah graf sederhana yang setiap simpulnya mempunyai sisi ke semua simpul lainnya. Graf lengkap dengan n buah simpul dilambangkan dengan K_n. Setiap simpul pada K_n berderajat $n-1$ [2].

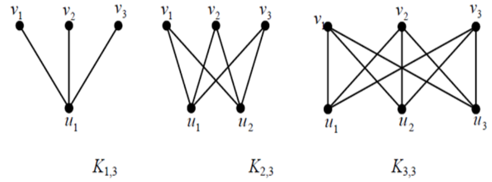


Gambar 4. Graf K_n dengan $n = 1,2,3,4,5$ dan 6

Graf Bipartisi Komplit (*Complete Bipartite Graph*)

Definisi

Graf bipartisi komplit (*complete bipartite graph*) adalah graf bipartisi dengan himpunan partisi X dan Y sehingga masing-masing simpul di X dihubungkan dengan masing-masing simpul di Y oleh tepat satu sisi. Jika $|X| = m$ dan $|Y| = n$, maka graf bipartisi tersebut dinyatakan dengan $K_{m,n}$ [9].



Gambar 5. Graf Bipartisi Komplit

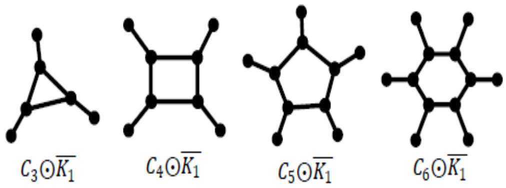
d'Cartesian: Jurnal Matematika dan Aplikasi, Vol. 10, No. 1, (Maret 2021): 15-23

Graf Matahari (*Sun Graph*)

Definisi

Graf matahari ($C_n \odot \overline{K_1}$) merupakan graf yang dibentuk dari suatu graf lingkaran C_n dimana setiap *vertex* pada graf lingkaran tersebut diberi tambahan satu *vertex* berderajat satu sedemikian sehingga setiap *vertex* pada graf matahari memiliki derajat 3, kecuali pada *vertex* ujung-ujungnya yang memiliki derajat 1.

Graf matahari sendiri adalah hasil produk korona antara dua graf, yaitu graf lingkaran dengan *n vertex* dan komplemen dari graf lengkap dengan jumlah *vertex* satu ($\overline{K_1}$). Graf matahari dinotasikan dengan $C_n \odot \overline{K_1}$, dengan menyatakan banyaknya *vertex* pada graf lingkaran [10].



Gambar 6. Graf Matahari

Matriks *Laplacian*

Menurut [5], Matriks *Laplacian* dari graf berarah atau tak-berarah G adalah $\mathcal{L}(G) = D(G) - A(G)$ dengan $D(G)$ matriks diagonal dari graf G dan $A(G)$ matriks ketetanggaan dari graf G.

Dengan demikian, entri matriks *Laplacian* ($\mathcal{L}(G)$) adalah

$$\mathcal{L}_{n \times n} = [l_{ij}] = \begin{cases} -1, & jika\ (v_i, v_j) \in G \\ d(v_i), & jika\ v_i = v_j \\ 0, & jika (v_i, v_j) \notin E(G) \end{cases} \qquad (1)$$

Nilai Eigen

Definisi

Jika A adalah matriks $n \times n$, maka vektor taknol x dalam $\mathbb{R}^n$ dinamakan vektor eigen (*eigenvector*) dari A jika Ax adalah kelipatan skalar dari x; yakni,

$$Ax = \lambda x \qquad (2)$$

untuk suatu skalar λ. Skalar λ dinamakan nilai *eigen* (*eigenvalue*) dari A dan x dikatakan vektor *eigen* yang bersesuaian dengan λ.

Untuk mencari nilai eigen matriks A yang berukuran $n \times n$ maka kita menuliskan kembali $Ax = \lambda x$ sebagai

$$Ax = \lambda Ix \qquad (3)$$

atau secara ekivalen

$$(\lambda I - A)x = 0 \qquad (4).$$

Supaya λ menjadi nilai eigen, maka harus ada pemecahan taknol dari persamaan ini. Persamaan (4) akan mempunyai pemecahan taknol jika dan hanya jika

$$det(\lambda I - A) = 0 \qquad (5).$$

Ini dinamakan persamaan karakteristik A; skalar yang memenuhi persamaan ini adalah nilai eigen dari A. Polinom karakteristik dari matriks $n \times n$ mempunyai bentuk

$$det(\lambda I - A) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \cdots + c_n \qquad (6)$$

Bila diperluas, maka determinan $det(\lambda I - A)$ adalah polinom λ yang kita namakan polinom karakteristik dari A [11].

2. METODE PENELITIAN

Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian dilaksanakan selama bulan Oktober-November tahun 2020 dengan tempat penelitian di rumah atau *work from home* karena adanya pandemi Covid-19.

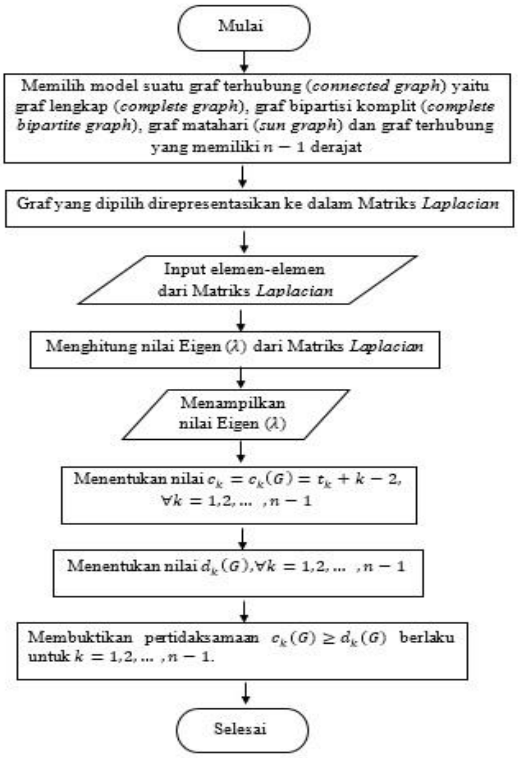
Metode Penelitian

Metode yang digunakan adalah metode Studi Pustaka. Metode ini dilakukan dengan mengumpulkan referensi-referensi berupa buku, jurnal maupun sumber-sumber lainnya seperti internet.

Tahapan Penelitian

1. Memilih model suatu graf terhubung (*connected graph*) yaitu graf lengkap (*complete graph*), graf bipartisi komplit (*complete bipartite graph*), graf matahari (*sun graph*) dan graf terhubung yang memiliki $n-1$ derajat. Dengan dipilih nilai $n = 2,3,4$ dan 5 pada graf lengkap (*complete graph*). Nilai $m = 1,2$ dan $n = 1,2,3$ untuk graf bipartisi komplit (*complete bipartite graph*). Nilai $n = 3,4$, dan 5 untuk graf matahari (*sun graph*). Nilai yang digunakan $n = 3,4,5$ dan 6 untuk graf yang memiliki $n-1$ derajat berbeda.
2. Graf yang dipilih direpresentasikan ke dalam Matriks *Laplacian*
3. Menghitung nilai Eigen (λ) dari Matriks *Laplacian* menggunakan definisi nilai Eigen yaitu dengan membentuk polinom karakteristik yang diperoleh dari $\det(\lambda I - A) = 0$ dan juga menggunakan *software* Matematika. Untuk determinan menggunakan metode reduksi baris operasi baris elementer.
4. Menentukan nilai $c_k = c_k(G) = t_k + k - 2$, $\forall k = 1,2, \dots, n-1$, dimana $c_k(G)$ merupakan derajat terbesar ke-k pada matriks *Laplacian* dan pola dari t_k (nilai eigen terbesar ke-k dari matriks *Laplacian*).
5. Menentukan nilai $d_k(G), \forall k = 1,2, \dots, n-1$, dimana $d_k(G)$ merupakan derajat terbesar ke-k (derajat biasa) dari *connected graph*).
6. Membuktikan pertidaksamaan $c_k(G) \geq d_k(G)$ berlaku untuk $k = 1,2, \dots, n-1$.

Diagram Alir (*Flowchart*)



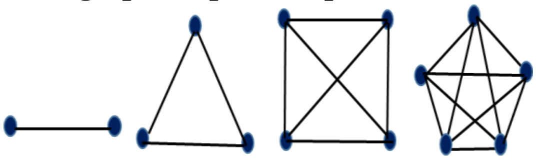
Gambar 7. Diagram Alir (*Flowchart*)

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Memilih model graf *G*

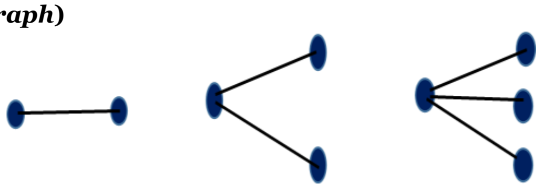
Tahap pertama dalam menentukan model graf G, graf tersebut telah dibatasi pada graf tak-berarah (*undirected graph*). Untuk graf terhubung terbatas pada graf lengkap (*complete graph*), graf bipartisi komplit (*complete bipartite graph*), graf matahari (*sun graph*) dan graf yang terdiri dari n buah *vertex* yang memiliki derajat berbeda atau $d(v) = 1, 2, 3, \dots, n-1$. Untuk kasus ini, dipilih nilai $n = 2,3,4$ dan 5 pada graf lengkap (*complete graph*). Nilai $m = 1,2$ dan $n = 1,2,3$ untuk graf bipartisi komplit (*complete bipartite graph*). Nilai $n = 3,4$, dan 5 untuk graf matahari (*sun graph*). Nilai $n = 3,4,5$ dan 6 untuk graf yang memiliki $n-1$ derajat berbeda.

Graf Lengkap (*Complete Graph*)

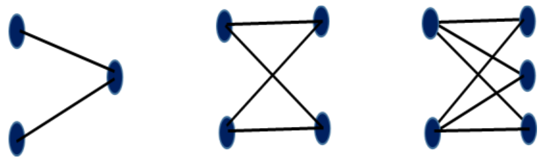


Gambar 8. K_2, K_3, K_4 dan K_5

Graf Bipartisi Komplit (*Bipartite Complete Graph*)

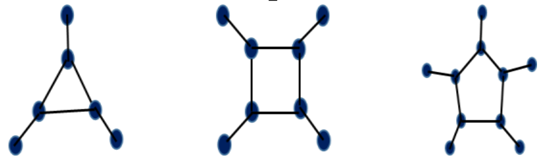


Gambar 9. $K_{1,1}, K_{1,2}$ dan $K_{1,3}$



Gambar 10. $K_{2,1}, K_{2,2}$ dan $K_{2,3}$

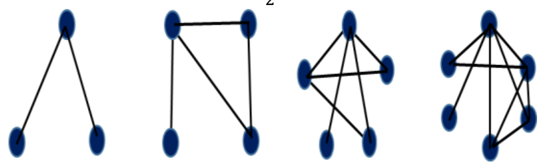
Graf Matahari (*Sun Graph*)



Gambar 11. $C_3 \odot \overline{K_1}, C_4 \odot \overline{K_1}$ dan $C_5 \odot \overline{K_1}$

Graf yang memiliki $n-1$ derajat berbeda

Graf ini dibentuk dari $d(v_i) = i$, dimana $i = 1,2,\dots,n-1$. Berarti v_n terhubung dengan v_{n-1} tetapi tidak terhubung dengan v_1 karena v_1 hanya terhubung dengan v_{n-1}, juga terhubung dengan v_{n-2} tetapi tidak terhubung dengan v_2 karena v_2 hanya terhubung dengan v_{n-1} dan v_{n-2}. Sehingga v_n hanya terhubung dengan $\frac{n}{2}$ *vertex* untuk n genap dan $\frac{n-1}{2}$ *vertex* untuk n ganjil.



Gambar 12. Graf yang memiliki $n-1$ derajat berbeda

Merepresentasikan Graf ke dalam Matriks *Laplacian*

Graf yang dipilih direpresentasikan ke dalam Matriks *Laplacian* seperti pada persamaan (1) untuk $v_i, \forall i = 1,2,\dots,n-1$ pada masing-masing graf yang terdiri dari n buah *vertex* sebagai berikut

Graf Lengkap (*Complete Graph*)

Bentuk umum Matriks *Laplacian* untuk Graf Lengkap (*Complete Graph*) K_n adalah

$$\mathcal{L}(K_n) = \begin{bmatrix} n-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & -1 \\ -1 & n-1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & n-1 & \cdots & -1 & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & n-1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & n-1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & n-1 \end{bmatrix}$$

Graf Bipartisi Komplit (*Bipartite Complete Graph*)

Bentuk umum Matriks *Laplacian* untuk Graf Bipartisi Komplit (*Complete Graph*) $K_{m,n}$ adalah

$$\mathcal{L}(K_{m,n}) = \begin{bmatrix} n & 0 & 0 & \cdots & -1 & -1 & -1 \\ 0 & n & 0 & \cdots & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & n & \cdots & -1 & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & m & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & 0 & m & 0 \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & 0 & 0 & m \end{bmatrix}$$

Graf Matahari (*Sun Graph*)

Graf Matahari tidak mempunyai bentuk umum seperti dua graf sebelumnya.

$$\mathcal{L}(C_3 \odot \overline{K_1}) = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{L}(C_4 \odot \overline{K_1}) = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{L}(C_5 \odot \overline{K_1}) = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Graf yang memiliki $n-1$ derajat berbeda

Bentuk umum Matriks *Laplacian* untuk Graf yang memiliki $n-1$ derajat berbeda ini pada n genap adalah

$$\mathcal{L}(G) = \begin{bmatrix} n-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & -1 \\ -1 & n-2 & -1 & \cdots & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & n-3 & \cdots & -1 & -1 & \cdots & -1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & \frac{n}{2} & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & \frac{n}{2} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 3 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sedangkan untuk n ganjil adalah

$$\mathcal{L}(G) = \begin{bmatrix} n-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & -1 \\ -1 & n-2 & -1 & \cdots & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & n-3 & \cdots & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & \frac{n+1}{2} & -1 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & \frac{n-1}{2} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 0 & \frac{n-1}{2} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Menghitung nilai Eigen (λ) dari Matriks *Laplacian*

Berdasarkan Matriks *Laplacian* yang diperoleh kemudian digunakan untuk nilai Eigen (λ) dengan persamaan karakteristik $det(\lambda I - A) = 0$. Untuk $A = \mathcal{L}(G)$, persamaan karakteristik menjadi $det(\lambda I - \mathcal{L}(G)) = 0$, dimana λ merupakan nilai Eigen dan I merupakan matriks identitas dengan ukuran yang sama dengan matriks $\mathcal{L}(G)$.

Graf Lengkap (*Complete Graph*)

$$\det(\lambda I - \mathcal{L}(K_n)) = \begin{vmatrix} \lambda-(n-1) & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & \lambda-(n-1) & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & \lambda-(n-1) & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & \lambda-(n-1) \end{vmatrix}$$

Misalkan $m = \lambda - (n-1)$ di mana matriks $\mathcal{L}(G)$ berukuran $n \times n$ diperoleh

$$\det(\lambda I - \mathcal{L}(K_n)) = \begin{vmatrix} m & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & m & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & m & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & m \end{vmatrix}$$

Melalui operasi baris elementer, determinan matriks direduksi menjadi matriks segitiga atas sehingga diperoleh

$$\det(\lambda I - \mathcal{L}(K_n)) = -(m-1)^{n-1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & m \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -(m+n-1) \end{vmatrix}$$

Dengan mensubstitusikan $m = \lambda - (n-1)$ kembali diperoleh persamaan karakteristik dari matriks $\mathcal{L}(G)$ adalah $(\lambda - n)^{n-1}\lambda = 0$.

Oleh karena itu, nilai Eigen yang diperoleh: $\lambda = 0$ dan $\lambda = n$

Dengan menggunakan *software* Matematika diperoleh hasil sebagai berikut:

Tabel 1. Nilai Eigen (λ) Matriks *Laplacian* dari K_n untuk $n = 2,3,4$ dan 5

No	n	λ_1	λ_2
1	2	2.000	0.000
2	3	3.000	0.000
3	4	4.000	0.000
4	5	5.000	0.000

Graf Bipartisi Komplit (*Bipartite Complete Graph*)

$$\det(\lambda I - \mathcal{L}(K_{m,n})) = \begin{bmatrix} \lambda-n & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-n & 0 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda-n & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & \lambda-m & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & \lambda-m & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \lambda-m \end{bmatrix}$$

Misalkan $p = \lambda - n$ dan $q = \lambda - m$ di mana matriks $\mathcal{L}(G)$ berukuran $(m+n) \times (m+n)$

$$\det(\lambda I - \mathcal{L}(K_{m,n})) = \begin{vmatrix} p & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & p & 0 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & p & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & q & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & q & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & q \end{vmatrix}$$

Melalui operasi baris elementer, determinan matriks direduksi menjadi matriks segitiga atas sehingga diperoleh

$$\det(\lambda I - \mathcal{L}(K_{m,n})) = -q^{n-1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & q \\ 0 & p & 0 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & p & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & mn-pq \end{vmatrix}$$

Dengan mensubstitusikan $p = \lambda - n$ dan $q = \lambda - m$ kembali diperoleh persamaan karakteristik dari matriks $\mathcal{L}(K_{m,n})$ adalah

$(\lambda - n)^{m-1}(\lambda - m)^{n-1}[mn - (\lambda - n)(\lambda - m)] = 0.$

Oleh karena itu, nilai Eigen yang diperoleh:

$\lambda = n,\ \lambda = m, \lambda = 0$ atau $\lambda = m + n$.
Dengan menggunakan *software* Matematika diperoleh hasil sebagai berikut:

Tabel 2. Nilai Eigen (λ) Matriks *Laplacian* dari $K_{m,n}$ untuk $m = 1{,}2$ dan $n = 1{,}2{,}3$

No	m	n	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4
1	1	1	2.000	0.000		
2		2	3.000	1.000	0.000	
3		3	4.000	1.000	0.000	
4	2	1	3.000	1.000	0.000	
5		2	4.000	2.000	0.000	
6		3	5.000	3.000	2.000	0.000

Graf Matahari (*Sun Graph*)

$$\det\left(\lambda I - \mathcal{L}(C_3 \odot \overline{K_1})\right) = \begin{vmatrix} \lambda-3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda-3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda-3 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \lambda-1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

Dengan menggunakan metode reduksi baris pada baris ke-4,5 dan 6 diperoleh

$$\det\left(\lambda I - \mathcal{L}(C_3 \odot \overline{K_1})\right) = \begin{vmatrix} -\lambda^2+4\lambda-2 & -(\lambda-1) & -(\lambda-1) \\ -(\lambda-1) & -\lambda^2+4\lambda-2 & -(\lambda-1) \\ -(\lambda-1) & -(\lambda-1) & -\lambda^2+4\lambda-2 \end{vmatrix}$$

Diperoleh persamaan karakteristik dari matriks $\mathcal{L}(C_3 \odot \overline{K_1})$ adalah
$\lambda^6 + 12\lambda^5 - 51\lambda^4 + 92\lambda^3 - 69\lambda^2 + 18\lambda = (\lambda^2 - 5\lambda + 3)^2\lambda(\lambda - 2) = 0$
Oleh karena itu, nilai Eigen yang diperoleh:
$\lambda = 4.3028, \lambda = 0.6972, \lambda = 0$ dan $\lambda = 2$

$$\det\left(\lambda I - \mathcal{L}(C_4 \odot \overline{K_1})\right) = \begin{vmatrix} \lambda-3 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda-3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \lambda-3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \lambda-3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \lambda-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \lambda-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

Dengan menggunakan metode reduksi baris pada baris ke-5,6,7 dan 8 diperoleh:

$$\det\left(\lambda I - \mathcal{L}(C_4 \odot \overline{K_1})\right) = \begin{vmatrix} -\lambda^2+4\lambda-2 & -(\lambda-1) & -(\lambda-1) & 0 \\ -(\lambda-1) & -\lambda^2+4\lambda-2 & 0 & -(\lambda-1) \\ -(\lambda-1) & 0 & -\lambda^2+4\lambda-2 & -(\lambda-1) \\ 0 & -(\lambda-1) & -(\lambda-1) & -\lambda^2+4\lambda-2 \end{vmatrix}$$

Diperoleh persamaan karakteristik dari matriks $\mathcal{L}(C_4 \odot \overline{K_1})$ adalah $\lambda^8 - 16\lambda^7 + 100\lambda^6 - 312\lambda^5 + 516\lambda^4 - 448\lambda^3 + 192\lambda^2 - 32\lambda$.
Oleh karena itu, nilai Eigen yang diperoleh:
$\lambda = 5.2361, \lambda = 0.7639, \lambda = 3.4142, \lambda = 0.5858, \lambda = 0$ dan $\lambda = 2$.

$$\det\left(\lambda I - \mathcal{L}(C_5 \odot \overline{K_1})\right) = \begin{vmatrix} \lambda-3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda-3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \lambda-3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \lambda-3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \lambda-3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

Dengan menggunakan metode reduksi baris pada baris ke-6,7,8,9 dan 10 diperoleh:

$$\det\left(\lambda I - \mathcal{L}(C_5 \odot \overline{K_1})\right) = -\begin{vmatrix} \lambda^2-4\lambda+2 & \lambda-1 & \lambda-1 & 0 & 0 \\ \lambda-1 & \lambda^2-4\lambda+2 & 0 & \lambda-1 & 0 \\ \lambda-1 & 0 & \lambda^2-4\lambda+2 & 0 & \lambda-1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & \lambda^2-4\lambda+2 & \lambda-1 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & \lambda-1 & \lambda^2-4\lambda+2 \end{vmatrix}$$

Diperoleh persamaan karakteristik dari matriks $\mathcal{L}(C_5 \odot \overline{K_1})$ adalah $-\lambda^{10} + 20\lambda^9 - 165\lambda^8 + 730\lambda^7 - 1890\lambda^6 + 2942\lambda^5 - 2740\lambda^4 + 1480\lambda^3 - 425\lambda^2 + 50\lambda$.
Oleh karena itu, nilai Eigen yang diperoleh:
$\lambda = 0.4755, \lambda = 0.742, \lambda = 2.9065, \lambda = 4.876, \lambda = 0$ dan $\lambda = 2$.

Karena Graf ini tidak memiliki bentuk umum untuk matriks *Laplacian*, maka nilai n akan dicari untuk beberapa nilai setelah $n = 5$ untuk melihat pola nilai Eigen yang terbentuk.

Tabel 3. Nilai Eigen (λ) Matriks *Laplacian* dari $C_n \odot \overline{K_1}$ untuk $n = 3{,}4{,}\ldots{,}8$

No	n	λ_1	λ_2
1	3	4.3028	2
2	4	5.2361	3.4142
3	5	4.876	2.9065
4	6	5.2361	4.3028
5	7	5.0489	3.8019
6	8	5.2361	4.6855

Graf yang memiliki $n-1$ derajat berbeda

Untuk n genap, dihitung nilai determinan sebagai berikut;

$$\det\left(\lambda I - \mathcal{L}(G)\right) = \begin{vmatrix} \lambda-n+1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda-n+2 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda-n+3 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & \lambda-\frac{n}{2} & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & \lambda-\frac{n}{2} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \lambda-3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda-2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

Melalui operasi baris elementer, determinan matriks direduksi menjadi matriks segitiga atas sehingga diperoleh

$$\det\left(\lambda I - \mathcal{L}(G)\right)$$
$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda-1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda-2 & -(\lambda-1) \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda-3 & -(\lambda-2) & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda-\frac{n}{2} & -\left(\lambda-\frac{n}{2}+1\right) & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\left(\lambda-\frac{n}{2}+1\right)\left(\lambda-\frac{n}{2}-1\right) & \left(\lambda-\frac{n}{2}+1\right)\left(\lambda-\frac{n}{2}-1\right) & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & -(\lambda-2)(\lambda-n+2) & (\lambda-2)(\lambda-n+2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -(\lambda-1)(\lambda-n+1) & (\lambda-1)(\lambda-n+1) \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -\lambda(\lambda-n) \end{vmatrix}$$

Diperoleh persamaan karakteristik dari matriks $\mathcal{L}(G)$ adalah

$$-\lambda(\lambda-n)(\lambda-1)(\lambda-n+1)(\lambda-2)(\lambda-n+2)\ldots\left(\lambda-\frac{n}{2}+1\right)\left(\lambda-\frac{n}{2}-1\right) = 0.$$

Oleh karena itu, nilai Eigen yang diperoleh:

$$\lambda = 0, n, 1, n-1, 2, n-2, \ldots\ , \frac{n}{2}-1, \frac{n}{2}+1$$

Untuk n ganjil, dihitung nilai determinan sebagai berikut;

$$\det\left(\lambda I - \mathcal{L}(G)\right) = \begin{vmatrix} \lambda-n+1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda-n+2 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda-n+3 & \cdots & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & \lambda-\frac{n+1}{2} & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & \lambda-\frac{n-1}{2} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & \lambda-\frac{n-1}{2} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda-3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda-2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

Melalui operasi baris elementer, determinan matriks direduksi menjadi matriks segitiga atas sehingga diperoleh

$$\det\left(\lambda I - \mathcal{L}(G)\right) =$$
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda-1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda-2 & -(\lambda-1) \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda-3 & -(\lambda-2) & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \left(\lambda-\frac{(n-1)}{2}\right) & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \left(\lambda-\frac{(n-1)}{2}\right) & -\left(\lambda-\frac{(n-1)}{2}\right) & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -\left(\lambda-\frac{(n-1)}{2}+1\right)\left(\lambda-\frac{(n-1)}{2}-2\right) & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & -(\lambda-2)(\lambda-n+2) & (\lambda-2)(\lambda-n+2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -(\lambda-1)(\lambda-n+1) & (\lambda-1)(\lambda-n+1) \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -\lambda(\lambda-n) \end{vmatrix}$$

Diperoleh persamaan karakteristik dari matriks $\mathcal{L}(G)$ adalah

$$-\lambda(\lambda-n)(\lambda-1)(\lambda-n+1)(\lambda-2)(\lambda-n+2)\dots\left(\lambda-\frac{(n-1)}{2}+1\right)\left(\lambda-\frac{(n-1)}{2}-2\right)\left(\lambda-\frac{(n-1)}{2}\right)=0.$$

Oleh karena itu, nilai Eigen yang diperoleh:

$$\lambda=0,n,1,n-1,2,n-2,\dots\ ,\frac{(n-1)}{2}-1,\frac{(n-1)}{2}+2,\frac{(n-1)}{2}$$

Tabel 4. Nilai Eigen (λ) Matriks *Laplacian* dari Graf yang memiliki $n-1$ derajat berbeda untuk nilai $n=$ 3,4,5 dan 6

No	n	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6
1	3	3.000	1.000	0.000			
2	4	4.000	3.000	1.000	0.000		
3	5	5.000	4.000	2.000	1.000	0.000	
4	6	6.000	5.000	4.000	2.000	1.000	0.000

Menentukan nilai $c_k=c_k(G)=t_k+k-2$.

Graf Lengkap (*Complete Graph*)

Nilai-nilai Eigen dari matriks $\mathcal{L}(G)$ untuk K_n yang diperoleh dari perhitungan menggunakan definisi nilai Eigen adalah

$$t_k=\begin{cases}t_1=n\\ t_2=0\end{cases};n=2,3,4,\dots$$

Sehingga nilai $c_k(G)$ untuk $k=1$ adalah

$$c_1=c_1(G)=t_1+1-2=n-1$$

Graf Bipartisi Komplit (*Bipartite Complete Graph*)

Nilai-nilai Eigen dari matriks $\mathcal{L}(G)$ untuk $K_{m,n}$ yang diperoleh dari perhitungan menggunakan definisi nilai Eigen adalah

$$t_k=\begin{cases}t_1=m+n\\ t_2=\max\{m,n\}\\ t_3=\min\{m,n\}\\ t_4=0\end{cases};m,n\neq 1 \text{ dan} \begin{cases}t_1=m+n\\ t_2=1\\ t_3=0\end{cases};m=1\vee n=1$$

Sehingga nilai $c_k(G)$ untuk $k=1,2$ adalah $c_1=c_1(G)=t_1+1-2=m+n-1=\max\{m,n\}+\min\{m,n\}-1$ dan $c_2=c_2(G)=t_2+2-2=\max\{m,n\}$

Graf Matahari (*Sun Graph*)

Nilai-nilai Eigen dari matriks $\mathcal{L}(G)$ untuk $C_n\odot\overline{K_1}$ yang diperoleh dari perhitungan menggunakan definisi nilai Eigen adalah

$$t_1=\begin{cases}4.3028,4.876,5.0489,\dots, & n=3,5,7,\dots,\\ 5.2361, & n=4,6,8,\dots,\end{cases}$$

$$t_2=\begin{cases}2,2.9065,3.8019,\dots, & n=3,5,7,\dots,\\ 3.4142,4.3028,4.6855,\dots, & n=4,6,8,\dots,\end{cases}$$

Diperoleh t_1 dan t_2 untuk $n=3,5,7,\dots$ serta t_2 untuk $n=4,6,8,\dots$ monoton naik sedangkan t_1 untuk $n=4,6,8,\dots$ konstan. Sehingga $t_1\geq 4.3028$ dan $t_2\geq 2$. Sehingga nilai $c_k(G)$ untuk $k=1,2$ adalah $c_1=c_1(G)=t_1+1-2\geq 4.3028-1\geq 3.3028$ dan $c_2=c_2(G)=t_2+2-2\geq 2$.

Graf yang memiliki $n-1$ derajat berbeda

Nilai-nilai Eigen dari matriks $\mathcal{L}(G)$ untuk Graf yang memiliki $n-1$ derajat berbeda terdapat 2 kasus untuk n ganjil dan n genap.

i). Untuk n ganjil, nilai Eigen yaitu

$$\lambda=0,1,2,\dots\ ,\frac{(n-1)}{2}-1,\frac{(n-1)}{2},\frac{(n-1)}{2}+2,\dots\ ,n-2,n-1,n$$

Sehingga diperoleh nilai t_k sebagai berikut

$$t_k=\begin{cases}n-k+1, & k=1,2,\dots,\frac{n-1}{2}\\ n-k, & k=\frac{n+1}{2},\dots,n-2,n-1\end{cases}$$

Sehingga nilai $c_k(G)$ untuk $k=1,2,\dots,n-1$ adalah

$$c_k=\begin{cases}n-1, & k=1,2,\dots,\frac{n-1}{2}\\ n-2, & k=\frac{n+1}{2},\dots,n-2,n-1\end{cases}$$

ii). Untuk n genap, nilai Eigen yaitu

$$\lambda=0,1,2,\dots\ ,\frac{n}{2}-1,\frac{n}{2}+1,\dots\ ,n-2,n-1,n$$

Sehingga diperoleh nilai t_k sebagai berikut

$$t_k=\begin{cases}n-k+1, & k=1,2,\dots,\frac{n}{2}\\ n-k, & k=\frac{n}{2}+1,\dots,n-2,n-1\end{cases}$$

Sehingga nilai $c_k(G)$ untuk $k=1,2,\dots,n-1$ adalah

$$c_k=\begin{cases}n-1, & k=1,2,\dots,\frac{n}{2}\\ n-2, & k=\frac{n}{2}+1,\dots,n-2,n-1\end{cases}$$

Menentukan nilai $d_k(G)$

Graf Lengkap (*Complete Graph*)

Berdasarkan definisi, Graf Lengkap memiliki derajat yang sama pada setiap *vertex* yaitu $n-1$ derajat, dimana Graf tersebut terdiri dari n *vertex*. Sehingga $d_1(G)=n-1$, dimana $n=2,3,4,\dots$ sesuai jumlah *vertex*.

Graf Bipartisi Komplit (*Bipartite Complete Graph*)

Berdasarkan definisi, Graf Bipartisi Komplit memiliki derajat m dan n, dimana Graf tersebut terdiri dari $m+n$ *vertex*. Sehingga $d_1(G)=\max\{m,n\}$ dan $d_2(G)=\min\{m,n\}$.

Graf Matahari (*Sun Graph*)

Berdasarkan definisi, Graf Matahari memiliki derajat 3 pada Graf Lingkaran dan 1 pada *vertex* ujungnya, dimana Graf tersebut terdiri dari $2n$ *vertex*. Sehingga $d_1(G)=3$ dan $d_2(G)=1$.

Graf yang memiliki $n-1$ derajat berbeda

Graf ini memiliki $n-1$ derajat berbeda yang berarti ada dua *vertex* yang memiliki derajat yang sama. Sehingga $d_k(G)=n-k$, untuk $n=3,4,\dots$ dan $k=1,2,\dots,n-1$.

Membuktikan pertidaksamaan $c_k(G)\geq d_k(G)$ berlaku untuk $k=1,2,\dots,n-1$.

Graf Lengkap (*Complete Graph*)

Diketahui bahwa $c_1=c_1(G)=t_1+1-2=n-1$ dan $d_1(G)=n-1$, untuk semua $n=2,3,\dots$ sehingga jelas bahwa

$$c_1(G)=n-1=d_1(G) \tag{7}$$

Graf Bipartisi Komplit (*Bipartite Complete Graph*)

Diketahui bahwa $c_1=c_1(G)=t_1+1-2=\max\{m,n\}+\min\{m,n\}-1$ dan $c_2=c_2(G)=t_2+2-2=\max\{m,n\}$ sedangkan $d_1(G)=\max\{m,n\}$ dan $d_2(G)=\min\{m,n\}$.

i). Akan dibuktikan $c_1(G)\geq d_1(G)$

Untuk $m = n$, diketahui $\max\{m,n\} = \min\{m,n\} = m$ dan $m \geq 1$

$$m \geq 1 \tag{8}$$

Tambahkan $m - 1$ di kedua ruas pada pertidaksamaan (8) menjadi

$$2m - 1 \geq m \tag{9}$$

$$\max\{m,n\} + \min\{m,n\} - 1 \geq \max\{m,n\} \tag{10}$$

$$\mathrm{c}_1(G) \geq \mathrm{d}_1(G) \tag{11}$$

Untuk $m \neq n$, diketahui $m \geq 1$ dan $n \geq 1$ menyebabkan $\max\{m,n\} \geq 1$ dan $\min\{m,n\} \geq 1$

$$\min\{m,n\} \geq 1 \tag{12}$$

Tambahkan $\max\{m,n\}$ di kedua ruas pada pertidaksamaan (12) menjadi

$$\max\{m,n\} + \min\{m,n\} \geq \max\{m,n\} + 1 \tag{13}$$

Tambahkan (-1) di kedua ruas pada pertidaksamaan (13) menjadi

$$\max\{m,n\} + \min\{m,n\} - 1 \geq \max\{m,n\} \tag{14}$$

$$c_1(G) \geq \mathrm{d}_1(G) \tag{15}$$

ii). Akan dibuktikan $c_2(G) \geq d_2(G)$

Untuk $m = n$, jelas bahwa

$$\max\{m,n\} = \max\{m,m\} = m = \min\{m,m\} = \min\{m,n\} \tag{16}$$

Untuk $m \neq n$, jelas bahwa

$$\max\{m,n\} > \min\{\mathrm{m,n}\} \tag{17}$$

Dari persamaan (16) dan (17) diperoleh

$$\max\{m,n\} \geq \min\{\mathrm{m,n}\} \tag{18}$$

$$\mathrm{c}_2(G) \geq \mathrm{d}_2(G) \tag{19}$$

Berdasarkan pertidaksamaan (11), (15) dan (19) diperoleh

$$\mathrm{c_k}(G) \geq \mathrm{d_k}(G) \tag{20}$$

Graf Matahari (*Sun Graph*)

Diketahui bahwa $c_1 = c_1(G) = t_1 + 1 - 2 \geq 4.3028 - 1 \geq 3.3028$ dan $c_2 = c_2(G) = t_2 + 2 - 2 \geq 2$. Sedangkan $d_1(G) = 3$ dan $d_2(G) = 1$. Dengan demikian, diperoleh pertidaksamaan.

$$c_1(G) \geq 3.3028 > 3 = d_1(G) \tag{21}$$

$$c_2(G) \geq 2 > 1 = d_2(G) \tag{22}$$

Dapat disimpulkan bahwa untuk Graf Matahari, berlaku

$$c_k(G) > d_k(G) \tag{24}$$

Graf yang memiliki $n - 1$ derajat berbeda

Diketahui untuk n ganjil

$$c_k = \begin{cases} n-1, & k = 1,2,\dots,\dfrac{n-1}{2} \\ n-2, & k = \dfrac{n+1}{2},\dots,n-2,n-1 \end{cases}$$

Sedangkan untuk n genap

$$c_k = \begin{cases} n-1, & k = 1,2,\dots,\dfrac{n}{2} \\ n-2, & k = \dfrac{n}{2}+1,\dots,n-2,n-1 \end{cases}$$

Diketahui pula bahwa $d_k(G) = n - k$, untuk $n = 3,4,\dots$ dan $k = 1,2,\dots,n-1$.

i). Untuk n ganjil

Diketahui nilai k pada t_k terdapat dua interval diskrit. Pada interval pertama jelas bahwa $k \geq 1$ atau dikalikan (-1) di kedua ruas menjadi

$$-1 \geq -k \tag{25}$$

Tambahkan n di kedua ruas pada pertidaksamaan (25) menjadi

$$n - 1 \geq n - k \tag{26}$$

$$c_k(G) \geq d_k(G) \tag{27}$$

Pada interval kedua jelas bahwa $k \geq \frac{n+1}{2}$ dan $n \geq 3$ diperoleh

$$k \geq 2 \tag{28}$$

$$-2 \geq -k \tag{29}$$

Tambahkan n di kedua ruas pada pertidaksamaan (29) menjadi

$$n - 2 \geq n - k \tag{30}$$

$$c_k(G) \geq d_k(G) \tag{31}$$

ii). Untuk n genap

Diketahui nilai k pada t_k terdapat dua interval diskrit. Pada interval pertama jelas bahwa $k \geq 1$ atau dikalikan (-1) di kedua ruas menjadi

$$-1 \geq -k \tag{32}$$

Tambahkan n di kedua ruas pada pertidaksamaan (32) menjadi

$$n - 1 \geq n - k \tag{33}$$

$$c_k(G) \geq d_k(G) \tag{34}$$

Pada interval kedua jelas bahwa $k \geq \frac{n}{2}$ +1 dan $n \geq 2$ diperoleh

$$k \geq 2 \tag{35}$$

$$-2 \geq -k \tag{36}$$

Tambahkan n di kedua ruas pada pertidaksamaan (36) menjadi

$$n - 2 \geq n - k \tag{37}$$

$$c_k(G) \geq d_k(G) \tag{38}$$

$\therefore$ Berdasarkan persamaan (7) dan pertidaksamaan (20), (24), (27), (31), (34) dan (38) terbukti bahwa $c_k(G) \geq d_k(G)$ pada graf terhubung (*connected graph*) untuk $k = 1,2,\dots,n-1$.

4. PENUTUP

Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian yang telah dilakukan, diperoleh bahwa untuk Graf Lengkap (*Complete Graph*) diperoleh persamaan yaitu $c_k(G) = d_k(G)$. Untuk Graf Bipartisi Komplit (*Complete Bipartite Graph*) diperoleh pertidaksamaan yaitu $c_k(G) \geq d_k(G)$. Untuk Graf Matahari (*Sun Graph*) diperoleh pertidaksamaan yaitu $c_k(G) > d_k(G)$ dan Graf dengan $n - 1$ derajat berbeda diperoleh pertidaksamaan yaitu $c_k(G) \geq d_k(G)$. Sehingga dapat disimpulkan untuk Graf Terhubung (*Connected Graph*) dengan n *vertex* berlaku $c_k(G) \geq d_k(G), \forall k = 1,2,\dots,n-1$. Di mana, bilangan $c_k = c_k(G) = t_k + k - 2$ merupakan derajat terbesar ke-k pada Matriks *Laplacian*, t_k merupakan nilai Eigen terbesar ke-k dari matriks *Laplacian* dan $d_k(G)$ merupakan derajat terbesar ke-k dari graf terhubung

REFERENSI

[1] Sumarmo, U. (1994). Suatu Alternatif Pengajaran untuk Meningkatkan Pemecahan Masalah Matematika pada Guru dan Siswa SMA. Laporan Hasil Penelitian FPMIPA IKIP Bandung.

[2] Munir, R. 2005. *Matematika Diskrit Edisi 3*. Bandung: Penerbit Informatika.

[3] Harris, John M., Hirst, Jeffry L., and Mossinghoff, Michael J.. 2008. *Combinatorics and Graph*

Theory Second Edition. New York: Springer Science+Business Media, LLC.

[4] Selvia, S. M., Narwen dan Zulakmal. 2015. Spektrum Graf Bintang S_n dan Graf Lengkap K_n untuk $n \geq 2$. *Jurnal Matematika UNAND*. **4(4)**: 129-136.

[5] Nurshiami, R.S., M.N. Estri, dan N. Sofiati. 2011. Karakteristik Nilai Eigen Dari Matriks Laplacian. *JMP*. **3(1)**: 33-38.

[6] Grone, R., and R. Merris, 1994, The Laplacian spectrum of a graph II. *SIAM J. Discrete Math*. **7:** 221-229..

[7] Guo, J.-M., 2007. On the third largest Laplacian eigenvalue of a graph. *Linear Multilinear Algebra*. **55**: 93-102.

[8] Samal, R. 2007. Laplacian Degree of a Graph (CSI of Charles University). http://www.openproblemgarden.org/op/laplacian_degrees_of_a_graph. [Diakses pada 6 Agustus 2020]..

[9] Purwanto, 1998. *Matematika Diskrit*. Malang: IKIP Malang.

[10] Addinnitya, A. 2012. Pelabelan Jumlah Eksklusif pada Graf Matahari, Graf Korona, dan Graf *Hairycycle* dengan Banyak Simpul Lingkaran Genap. [skripsi]. FMIPA UI, Depok.

[11] Anton, Howard. 1987. Aljabar Linear Elementer Edisi Kelima. Terjemahan oleh Patur Silaban dan I. Nyoman Susila. Jakarta: Erlangga.

Yohanes Imanuel Runtunuwu
(**17101103007@student.unsrat.ac.id**)
Lahir di Bogor, 15 Oktober 1999. Menempuh pendidikan tinggi Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Sam Ratulangi Manado. Tahun 2020 adalah tahun terakhir ia menempuh studi. Makalah ini merupakan hasil penelitian skripsinya yang dipublikasikan.

Chriestie Montolalu
(**chriestelly@unsrat.ac.id**)
Lahir di Tomohon, 10 Desember 1983. Pada tahun 2015 memperoleh gelar Magister Sains (M.Sc) dari Queensland University. Menjadi pengajar tetap di Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Sam Ratulangi Manado.

Mans Mananohas
(**mansmananohas@unsrat.ac.id**)
Lahir di Ambon, 11 Juni 1984. Pada tahun 2013 memperoleh gelar Magister Sains (M.Si) dari Institut Teknologi Bandung. Menjadi pengajar tetap di Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Sam Ratulangi Manado.