d'CartesiaN

Jurnal Matematika dan Aplikasi

p-ISSN:2302-4224 e-ISSN: 2685-1083

Journal homepage: https://ejournal.unsrat.ac.id/index.php/decartesian

Sekitar Teorema Diamond B-Aljabar

Sahlan Sidjara[1*], Irwan[1], Maya Sari Wahyuni[1] dan Asriani Asnita Asni[1]

[1]Jurusan Matematika–Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam–Universitas Negeri Makassar, Indonesia

[*]Corressponding author : sahlansidjara@unm.ac.id

A B S T R A K

Pengertian B-aljabar telah diperkenalkan oleh J.Neggers dan H.S.Kim di tahun 2002. Selanjutnya, di tahun 2005, W. Waldenziak mendetailkan tentang karakteristik dari B-Subaljabar Normal yang dapat diasumsikan bawah struktur dari B-Aljabar memiliki kemiripan dari struktur yang dimiliki oleh suatu grup. Selanjutnya di tahun 2014, Joemar C. Endam dan Jocelyn P. Vilela mendefinisikan kondisi himpunan yang merupakan hasil kali dari B-Subaljabar dan juga membuktikan teorema Isomorfisma kedua untuk B-Aljabar yang dikenal dengan teorema Diamond. Tulisan ini membahas mengenai sifat tambahan dari Teorema Diamond untuk B-Aljabar.

INFO ARTIKEL

Diterima : 27 November 2020

Diterima setelah revisi : 15 Maret 2021

Tersedia *online* : 31 Maret 2021

Kata Kunci:
B-*Aljabar*
B-Isomorfisma
Teorema Diamond B-Aljabar

A B S T R A C T

The concept of B-algebra was introduced by J. Neggers and HSKim in 2002. Furthermore, in 2005, W. Waldenziak detailed the characteristics of B-Normal Subalgebra which can be assumed that the structure of B-Algebra has similarities to the structure owned by a group and in 2014, Joemar C. Endam and Jocelyn P. Vilela not only defined set conditions which are the product of B-Subalgebra but also prove the second Isomorphism theorem for B-Algebra which is known as the Diamond theorem.This paper discusses about the additional nature of the Diamond Theorem for B-Algebra.

ARTICLE INFO

Accepted : 27 November 2020

Accepted after revision : 15 March 2021

Available online : 31 March 2021

Keywords:
B-Algebra
B-Isomorphism
Teorema Diamond B-Aljabar

1. PENDAHULUAN

J. Neggers dan H.S. Kim di tahun 2002 telah memperkenalkan definisi dari B-Aljabar yaitu: Suatu himpunan tak hampa X dengan operasi biner $*$ dengan elemen konstan 0 di notasikan dengan $(X;*,0)$ disebut B-Aljabar jika memenuhi kondisi: $\forall a,b,c \in X$, berlaku: (i) $a*a=0$, (ii) $a*0=a$ dan $(a*b)*c=a*(c*(0*b))$ [1], dan juga diperkenalkan mengenai B-subaljabar yaitu: Misal $(X;*,0)$ suatu B-Aljabar, suatu subhimpunan tak hampa N disebut B-Subaljabar dari X jika untuk setiap $a,b \in N$ berlaku $a*b \in N$ dan mudah ditunjukkan bahwa jika N merupakan B-Subaljabar dari X maka $0 \in N$, serta definisi dari B-Subaljabar Normal yaitu: N merupakan B-Subaljabar normal dari X jika memenuhi $(a*x)*(b*y) \in N$ untuk setiap $a,b,x,y \in N$ [2]. Selanjutnya Andrzej Walendziak dalam tulisannya [3] telah menunjukaan sifat-sifat dari B-subaljabar normal. Kemudian di tahun 2010, N. O. Al-Shehri menunjukkan karakteristik dari homomorfisma B-Aljabar [4], lalu Joemar C. Edam dan Jocelyn P Vilela medefinisikan kondisi himpunan yang merupakan hasil kali dari dua buah B-Subaljabar dan juga menunjukkan teorema isomorfisma kedua untuk B-Aljabar yang dikenal dengan istilah teorema diamond [5]. Pada tulisan ini dibahas mengenai sifat tambahan dari teorema diamond untuk B-Aljabar dengan cara pandang yang berbeda.

2. METODE PENELITIAN

Penelitian ini merupakan studi literatur dalam penelitian ini dilakukan pengembangan dari hasil-hasil dari artikel terkait B-Aljabar. Beberapa sifat-sifat dari B-Aljabar akan ditunjukkan terlebih dahulu dan selanjutnya dilakukan pembuktian teorema diamond dengan cara pandang yang berbeda.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada tulisan ini kita Misalkan $(X;*,0)$suatu B-Aljabar yang cukup di tulis X B-Aljabar dan N merupakan subaljabar dari X B-aljabar yang kita tulis sebagai N subaljabar dari X

Definisi 3.1 [6]. *Suatu B-Aljabar X dikatakan komutatif jika* $\forall a,b \in X$ *berlaku* $a*(0*b)=b*(0*a)$.

Lemma 3.2 [1] *Jika* $(X:*,0)$ *B-Aljabar, maka* $\forall a,b \in X$ *berlaku*

1 $a*b=a*(0*(0*b))$

2 $(a*b)*(0*b)=a$

Bukti

1. Ambil sebarang $a, b \in X$. Berdasarkan sifat (ii) dan sifat (iii) dari B-Aljabar dapat diperoleh $a * b = a * (0 * (0 * b))$.
2. Ambil sebarang $a, b \in X$. Misal $c = (0 * b)$. Diperhatikan bahwa $(a * b) * (0 * b) = (a * b) * c$. Karena $c = (0 * b)$ diperoleh $(a * b) * (0 * b) = a * (c * c)$. Berdasarkan sifat (i) dan sifat (ii) dari B-Aljabar diperoleh $(a * b) * (0 * b) = a$.

Preposisi 3.3 [3]. *Jika $(X{:}*, 0)$ adalah B-Aljabar maka $\forall a, b, c \in X$ berlaku*

1. $(a * c) * (b * c) = a * b$
2. $b * a = 0 * (a * b)$

Bukti

1. Ambil sebarang $a.b \in X$. Berdasarkan sifat (iii) diperoleh $(a * c) * (b * c) = x * \big((b * c) * (0 * c)\big) = a * \big(b * \big((0 * c) * (0 * c)\big)\big)$. Selanjutnya dengan sifat (i) dan sifat (ii) diperoleh $(a * c) * (b * c) = a * b$.
2. Ambil sebarang $a.b \in X$. Berdasarkan Lemma 3.2 diperoleh $b * a = b * ((a * b) * (0 * b))$. Selanjutnya dengan sifat (iii) dan sifat (i) diperoleh $b * a = 0 * (a * b)$.

Lemma 3.4 [3]. *Misal $\mathcal{N}$ suatu subaljabar dari X dan $a, b \in X$. Jika $a * b \in \mathcal{N}$ maka $b * a \in \mathcal{N}$.*

Bukti

Misal $x * y \in \mathcal{N}$. Berdasarkan Proposisi 3.3 (1), $b * a = 0 * (a * b)$. Perhatikan bahwa $0 \in \mathcal{N}$ dan $a * b \in \mathcal{N}$, sehingga $0 * (a * b) \in \mathcal{N}$. Akibatnya $b * a \in \mathcal{N}$.

Teorema 3.5 [3]. *Jika N merupakan subaljabar dari X B-Aljabar maka N Subaljabar Normal jika dan hanya jika untuk setiap $a \in X$ dan $n \in N$ berlaku $a * (a * n) \in \mathcal{N}$*

Bukti

Ambil sebarang $a \in X$ dan $n \in \mathcal{N}$. Maka $a * a = 0 \in \mathcal{N}$ dan $0 * n \in \mathcal{N}$. Karena $\mathcal{N}$ subaljabar normal, maka $(a * 0) * (a * n) \in \mathcal{N}$. Dengan sifat (ii) diperoleh $a * (a * n) \in \mathcal{N}$. Sebaliknya, ambil sebarang $a * n$, $x * y \in \mathcal{N}$. Berdasarkan Lemma 3.4 diperoleh $y * x \in \mathcal{N}$. Berdasarkan Preposisi 3.3 (1) diperoleh $(0 * x) * (0 * y) = (0 * x) * ((0 * x) * (y * x))$. Misal $a = 0 * x$ dan $b = y * x$ maka diperoleh $(a * (a * n) = (0 * x) * \big((0 * x) * (y * x)\big) \in \mathcal{N}$. Jadi $(0 * x) * (0 * y) \in \mathcal{N}$.
Selanjutnya diperhatikan bahwa berdasarkan definisi B-Aljabar diperoleh $a * \Big(a * \big((0 * x) * (0 * y)\big)\Big) = (a * x) * (a * y)$.
Misal $n = (0 * x) * (0 * y) \in \mathcal{N}$ maka diperoleh $a * (a * n) = a * \Big(a * \big((0 * x) * (0 * y)\big)\Big) = (a * x) * (a * y) \in \mathcal{N}$
Selanjutnya karena $(a * x) * (a * y) \in \mathcal{N}$ dan berdasarkan Lemma 3.4 diperoleh $(n * a) \in \mathcal{N}$ dengan $\mathcal{N}$ subaljabar maka $\big((a * x) * (a * y)\big) * (n * a) \in \mathcal{N}$. Kemudian dengan definisi B-Aljabar dan Preposisi 3.3 diperoleh $\big((a * x) * (a * y)\big) *= (a * x) * (n * y)$. Karena $\big((a * x) * (a * y)\big) * (n * a) \in \mathcal{N}$ maka $(a * x) * (a * y) \in \mathcal{N}$. Akibatnya $\mathcal{N}$ suatu B-Aljabar normal.

Lemma 3.7 [5]. *Jika V dan W merupakan Subaljabar dari X B-Aljabar maka:*

1. $V \subseteq VW, W \subseteq VW$ *dan* $V \subseteq WV, W \subseteq WV$.
2. $VV = V$
3. *Jika* $V \subseteq W$ *maka* $VW = WV = W$

Lemma 3.8 [5] *Jika N subaljabar normal dari X B-Aljabar maka N merupakan subaljabar normal dari semua subaljabar dari X B-Aljabar yang memuat N.*

Definisi 3.9 [5]. *Misalkan V dan W merupakan subaljabar dari X B-Aljabar. Himpunan $VW \subseteq X$ ditulis $VW = \{a \in X : a = v * (0 * w)$ untuk suatu $v \in V, w \in W\}$*

Secara umum, jika V dan W merupakan subaljabar dari X B-Aljabar maka VW belum tentu merupakan subaljabar dari X [5], untuk itu terdapat beberapa kondisi agar VW dapat menjadi subaljabar X yaitu:

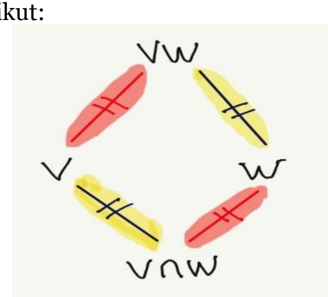
Teorema 3.10 [5]. *Jika V dan W merupakan subaljabar dari X B-Aljabar maka VW subaljabar dari X jika dan hanya jika $VW = WV$.*

Definisi 3.11 [5] *Misal X dan Y adalah B-Aljabar yang berturut-turut dinyatakan sebagai $(X{:}*, 0_X)$ dan $(Y{:}*, 0_Y)$. Suatu fungsi $\varphi: X \longrightarrow Y$ disebut B-Homomorfisma dari X ke Y jika untuk setiap $x, y \in X$ berlaku $\varphi(x * y) = \varphi(x) * \varphi(y)$.*

Suatu B-Homomorfisma $\varphi: X \longrightarrow Y$ disebut B-Epimorfisma jika φ merupakan fungsi yang surjektif. Selanjutnya, dari kernel dari B-Homomorfisma $\varphi: X \longrightarrow Y$ yang didefinisikan sebagai
$Ker(\varphi) = \{x \in X \mid \varphi(x) = 0_Y\}$ dan juga merupakan subaljabar normal dari X [8] dan telah didefinisikan juga kuosien pada B-Aljabar di [1] yaitu: Misal X suatu B-Aljabar dan $\mathcal{N}$ subaljabar normal dari X. Maka $(X/\mathcal{N}{:}*, 0\mathcal{N})$ merupakan B-Aljabar yang disebut B-Aljabar Kuosien dari X modulo $\mathcal{N}$ dengan $X/\mathcal{N} = \{x\mathcal{N} \mid x \in X\}$ dan operasi $*$ yang didefinisikan $x\mathcal{N} * y\mathcal{N} = (x * y)\mathcal{N}$. Untuk $x \in X$, $x\mathcal{N}$ merupakan kelas ekivalen yang memuat x, yaitu $x\mathcal{N} = \{y \in X \mid x \sim_{\mathcal{N}} y\}$. Selanjutnya teorema dasar isomorhisma untuk B-Aljabar telah di buktikan oleh [8] dengan teorema sebagai berikut

Teorema 3.12 [8]. *Jika $\varphi: X \longrightarrow Y$ merupakan B-epimomorfisma dari X ke Y maka $X/ker\ (\varphi) \cong Y$*

Dengan adanya teorema dasar isomorphisma B-Aljabar ini memungkinan diperolehnya teorema II isomorfisma yang dikenal dengan teorema diamond, perhatikan gambar berikut:



Gambar 1. Teorema Diamond B-Aljabar

Teorema 3.13: *Jika V merupakan subaljabar dari X B-Aljabar dan W merupakan subaljabar normal dari X B-Aljabar maka $V/(V \cap W) \cong VW/W$*

Teorema 3.13. ini merupakan versi 1 (garis kuning) dari teorema diamond yang telah ditunjukkan oleh Joemar C. Endam dan Jocelyn P. Vilela (2014) pada [5]. Namun terdapat versi 2 dari teorema diamond (garis merah) dengan teorema sebagai berikut:

Teorema 3.14: *Jika W merupakan subaljabar dari X B-Aljabar dan V merupakan subaljabar normal dari X B-Aljabar maka $W/(V \cap W) \cong VW/V$*

Sebelum membuktikan teorema 3.14, terlebih dahulu akan dibuktikan beberapa lemma berikut:

Lemma 3.15: *Jika V dan W merupakan subaljabar dari X B-Aljabar dan V subaljabar normal dari X B-Aljabar maka $V \cap W$ merupakan subaljabar normal dari W*

Bukti.

Jelas bahwa $V \cap W$ merupakan subaljabar dari W. Selanjutnya, ambil $a \in V$ dan $b \in V \cap W$. Perhatikan bahwa $b \in V$ dan $a \in V \subseteq X$. Karena V merupakan subaljabar Normal, berdasarkan teorema 3.5 diperoleh $a * (a * b) \in V$ dilain pihak, karena W subaljabar dan $a, b \in V$ berakibat $a * (a * b) \in W$ sehingga diperoleh $a * (a * b) \in V \cap W$, berdasarkan teorema 3.5 $V \cap W$ merupakan subaljabar normal dari W.

Bukti Teorema 3.14.

Berdasarkan Lemma 3.15 $V \cap W$ merupakan subaljabar normal dari W dengan demikian $W/V \cap W$ terdefinisi. Perhatikan bahwa karena W merupakan subaljabar dari X B-Aljabar dan V subaljabar normal dari X B-Aljabar, jelas bahwa VW merupakan subaljabar dari X B-Aljabar, jadi berdasarkan Teorema 3.10, $VW = WV$ merupakan X B-Aljabar. Akibatnya, berdasarkan lemma 3.7 (1) dan lemma 3.8 diperoleh V merupakan subaljabar normal dari VW, dengan demikian VW/V terdefinisi. Selanjutnya definisikan Pengaitan: $\theta: W \longrightarrow VW/V$ dengan $\theta(w) = [w]_V$ $\forall\, w \in W$. Karena $V \subseteq VW$ akibatnya dengan $\theta(w) = [w]_V \in VW/V$ $\forall\, w \in W$. Ambil $w_1, w_2 \in W$ sebarang dengan $w_1 = w_2$ jadi diperoleh $\theta(w_1) = [w_1]_V = [w_2]_V = \theta(w_1)$ sehingga θ merupakan suatu pemetaan. Selanjutnya, Ambil $w_1, w_2 \in W$ sebarang perhatikan bahwa:

$\theta(w_1 * w_1) = [w_1 * w_1]_V = [w_1]_V * [w_2]_V = \theta(w_1) * \theta(w_2)$

Kemudian, ambil $[a]_V \in VW/V$ sebarang, misal$[a]_V = [w * (0 * v)]_V$ untuk suatu $w \in W$ dan $v \in V$ sehingga diperoleh:

$$[a]_V = [w * (0 * v)]_V = [w]_V * [0 * v]_V = [w]_V = \theta(w)$$

Dengan demikian θ merupakan Epimorfisma. Dilain pihak, perhatikan bahwa:

$Ker\ (\theta) = \{w \in W \mid \theta(w) = V\} = \{w \in W \mid [w]_V = [0]_V\} = \{w \in W \mid w \in V\} = W \cap V$

Berdasarkan teorema dasar isomorfisma (Teorema 3.12) diperoleh $W/(V \cap W) \cong VW/V$.

4. PENUTUP

Kesimpulan

Berdasarkan uraian pada bagian hasil dan pembahasan disimpulkan bahwa struktur B-Aljabar memiliki kemiripan dengan struktur dari grup dan teorema 3.13 dan teorema 3,14 merupakan bentuk lengkap dari teorema diamond untuk B-Aljabar.

UCAPAN TERIMAKASIH

Terimakasih kami ucapkan kepada PNBP FMIPA Universitas Negeri Makassar.

REFERENSI

[1] Neggers, J., & Kim, H. S. (2002). On B-Algebras. *Matematiqki Vesnik, 54*, 21-29.

[2] Allen, P., Neggers, J., & Kim, H. S. (2003). B-Algebras and Groups. *Scientiae Mathematicae Japonicae Online, 9*, 159–165.

[3] Walendziak, A. (2005). A Note On Normal Subalgebras In B-Algebras. *Scientiae Mathematicae Japonicae Online*, 49-53.

[4] Al-Shehri, N. (2010). On Hom(-, -) as B-Algebras. *JP Journal of Algebra, Number Theory and Applications, 18*, 17-2

[5] Joemar C. Endam & Jocelyn P. Vilela. (2014). The Second Isomorphism Theorem for B-Algebras. Applied Mathematical Sciences

[6] Kim, H. S., & Park, H. G. (2005). On 0-Commutative B-Algebras. *Scientiae Mathematicae Japonicae Online*, 31-36.

[7] Lingcong, J. A., & Endam, J. C. (2016). Direct Product Of B-Algebras. *International Journal of Algebra, 10*, 33-40

[8] J. Neggers and H.S.Kim, A. (2002). Fundamental Theorem of B-Homomorphism for B-Algebras. *Intern. Math. J.* 2. 207-214

Sahlan Sidjara (sahlansidjara@unm.ac.id)

Lahir di makassar sulawesi selatan yang saat ini bekerja sebagai staf pengajar jurusan matematika FMIPA UNM dan bekerja dalam penelitian dibidang geometri, aljabar dan matematika terapan.

Irwan (irwanthaha@unm.ac.id)

Lahir di sengkang sulawesi selatan yang saat ini bekerja sebagai staf pengajar jurusan matematika FMIPA UNM dan bekerja dalam penelitian statistika.

Maya Sari Wahyuni (maya.sari.wahyuni@unm.ac.id)

Merupakan Staf pengajar di jurusan matematika FMIPA UNM dan bekerja dalam bidang komputasi matematika.

Asriani Asnita Asni (arsitaasni98@gmail.com)

Merupakan mahasiswi program studi matematika FMIPA UNM angkatan 2016.