MASALAH TONGKAT DAN TALI : KARDIOID VERSUS ELIPS

Mans L Mananohas

Program StudiMatematika, F-MIPA, UNSRAT,mansmananohas@yahoo.com

Abstrak

Sebuah tali dengan panjang tertentu diikatkan ke sebuah tongkat dengan panjang juga tertentu tepat pada tiap ujungnya. Di sini kedua ujung tali masing-masing harus tepat berada di kedua ujung tongkat. Akan dicari bentuk tali yang memaksimumkan luas antara tali dan tongkat. Solusi yang diinginkan di sini adalah kurva berbentuk fungsi $x = f(t)$. Masalah ini akan dikaji untuk panjang tongkat 1 satuan. Untuk kasus panjang tali $1 < l \leq \frac{\pi}{2}$ telah ditemukan solusinya, yaitu segmen lingkaran. Akan tetapi solusi berupa segmen lingkaran sudah tidak berlaku lagi untuk kasus $l > \frac{\pi}{2}$. Pada penelitian sebelumnya, telah diperiksa beberapa keluarga kurva, dimana segmen elips memberikan luas paling besar. Pada penelitian ini penulis tertarik untuk memeriksa segmen kardioid. Hasilnya terdapat kasus dengan panjang yang sama, yakni 1.539600718, dimana segmen kardioid membentuk luas yang lebih besar bila dibandingkan dengan segmen elips.

Kata kunci :Masalah Dido, masalah tongkat dan tali, maksimum, kardioid, elips.

On The Stick and Rope Problem: Kardioid Versus Ellipse

Abstract

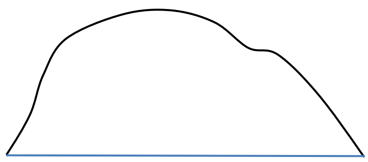
We attach a rope of a certain length to a stick of a certain length on its each end. We would like to find out the shape the rope should form that makes the area bounded by the rope and the stick be the largest possible. In this problem the end points are tied fixed. Here we want a solution in the form of curves that can be represented as a function of the form $x = f(t)$. *We simplify the problem by starting with the unit interval* $I = [0,1]$. *For the length of rope l with* $1 < l \leq \frac{\pi}{2}$, *we obtain the solution is a segment of a circle whose center is on vertical line* $t = \frac{1}{2}$. *However, if* $l > \frac{\pi}{2}$, *this solution is no longer valid, because the solution must be a function. In the previous research, we have checked some family curves, and we have found that the ellipse segment give the largest area than others. In this research we investigate the segment of kardioid. If length of the curve is 1.539600718 , we have result that segment of kardioid gives larger area than segment of elippse.*

Keywords *:Dido Problem, Stick and Rope Problem, Kardioid, Ellipse.*

.

1. Pendahuluan

Sebuah tali dengan panjang tertentu diikatkan ke sebuah tongkat dengan panjang juga tertentu tepat pada tiap ujungnya. Di sini kedua ujung tali masing-masing harus tepat berada di kedua ujung tongkat. Akan dicari bentuk tali yang memaksimumkan luas antara tali dan tongkat. Solusi yang diinginkan di sini adalah kurva berbentuk fungsi $x = f(t)$. Masalah ini dikenal dengan masalah tongkat dan tali [4].



Gambar 1. Daerah di antara tongkat dan tali

Masalah tongkat dan tali merupakan pengembangan dari masalah Dido [1,2,3]. Perbedaannya, jika dalam masalah Dido, kedua titik ujung bebas asalkan tetap berada pada sumbu horisontal, sedangkan dalam masalah tongkat dan tali kedua titik ujungnya tetap. Adapun solusi masalah Dido adalah segmen lingkaran. Sementara untuk masalah tongkat dan tali panjang tali jika panjang tali $1 < l \leq \frac{\pi}{2}$, solusinya masih berupa segmen lingkaran [4]. Akan tetapi, jika $l > \frac{\pi}{2}$ solusi berupa segmen lingkaran sudah tidak lagi memenuhi syarat sebuah solusi [5]. Selanjutnya, muncul pertanyaan kira-kira bentuk kurva seperti apa yang akan menjadi solusi pada kasus $l > \frac{\pi}{2}$. Pada [5] telah dilakukan pemeriksaan terhadap tiga jenis keluarga kurva, antara lain:

- $x(t) = a\left|t - \frac{1}{2}\right|^n + b$, dengan $n = 2,3,4,6,\ldots,9,10$
- $x(t) = 1 - e^{a(t^2-t)}$
- $4(t - \frac{1}{2})^2 + \frac{x^2}{b^2} = 1$

Berdasarkan [5], dari tiga keluarga kurva tersebut segmen elips membentuk luas yang paling besar. Hasil ini memberikan pertanyaan: apakah elips merupakan solusi masalah tongkat dan tali pada kasus $l > \frac{\pi}{2}$? Atau setidaknya untuk kasus $1 < l \leq \frac{\pi}{2}$, apakah elips memberikan hasil yang paling dekat dengan hasil yang diberikan oleh segmen lingkaran bila dibandingkan dengan bentuk kurva yang lain? Pada penelitian ini, penulis tertarik untuk memeriksa segmen kardioid, kemudian hasilnya akan dibandingkan dengan hasil yang diberikan oleh segmen elips.

2. FORMULASI MASALAH TONGKAT DAN TALI

Permasalahan ini disederhanakan dalam interval satuan $I = [0,1]$. Asumsikan $x: I \to R$ adalah fungsi C^2 yang merupakan representasi kurva yang dibentuk oleh tali dan memenuhi $x(0) = 0$, $x(1) = 0$. Syarat terakhir ini akan menjamin bahwa setiap ujung tali masing-masing berada tepat pada kedua ujung tongkat. Asumsikan juga $x(t) \geq 0$ untuk semua $t \in I$. Jadi, luas daerah yang dibatasi oleh kurva x dan interval satuan I adalah

$$A[x] = \int_0^1 x(t)dt$$

Demikian juga panjang kurva x disepanjang interval satuan I adalah

$$L[x] = \int_0^1 \sqrt{1 + \dot{x}^2}\ dt$$

3. Hasil dan Pembahasan

3.1 Kardioid

Berdasarkan [8], kardioid adalah sebuah grafik persamaan kutub dengan jari-jari:

$$r = a \pm a\cos\theta \text{ atau } r = a \pm a\sin\theta$$

Bentuk kardioid menyerupai bentuk jantung. Adapun bentuk kurva yang dibentuk oleh kedua keluarga kardioid tersebut adalah sama, hanya letaknya saja yang berbeda pada bidang kartesius. Dalam penelitian ini penulis tertarik menyelidiki keluarga kardioid $\mathcal{K} := \{(x(\theta), y(\theta))\}$ dengan:

$$x(\theta) = m + (a + a\cos\theta)sin\theta$$

$$y(\theta) = (a + a\cos\theta)cos\theta - n$$

dimana $\theta \epsilon [0..2\pi]$, serta a, m, n adalah bilangan riil positif.

Pada penelitian ini, penulis lebih tertarik pada keluarga segmen kardioid $\mathcal{K}$ dengan jarak kedua ujung segmen yang akan dibentuk maksimum, sementara dalam masalah tongkat dan tali kondisi ini dipenuhi apabila nilai maksimum $x_{maks} = \frac{1}{2}$ dan $x_{min} = 0$. Selanjutnya, akan dicari nilai $a, m, n \epsilon \mathbb{R}$ sedemikian sehingga segmen kardioid pada kuadran pertama melalui (0,0) dan (1,0), serta memenuhi $x_{maks} = 1$ dan $x_{min} = 0$.

3.2 Preposisi 1

Jika *K* adalah anggota keluarga kardioid $\mathcal{K}$ yang melalui (0,0) dan (1,0), maka nilai $x_{maks} = 1$ dan $x_{min} = 0$ dipenuhi saat $m = \frac{1}{2}$, $a = \frac{2}{9}\sqrt{3}$, dan $n = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

Bukti.

Karena $K \epsilon \mathcal{K}$, maka untuk setiap absis dari kardioid K dapat ditulis dalam bentuk:

$$x(\theta) = m + (a + a\cos\theta)sin\theta \qquad (*)$$

dimana $\theta \epsilon [0..2\pi]$, serta $a, m \epsilon \mathbb{R}$. Setelah itu, perhatikan bahwa

$$0 = x'(\theta) = a(2cos\,\theta - 1)(cos\theta + 1)$$

Disini kita hanya tertarik pada kasus $a \neq 0$, sehingga haruslah

$$(2cos\,\theta - 1)(cos\theta + 1) = 0 \qquad (**)$$

Dengan menyelesaikan (**), diperoleh titik ekstrim

$$\theta = \{0, \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}, \pi\}$$

Selanjutnya, dengan mensubstitusikan titik-titik ekstrim ke (*), diperoleh nilai :

$$x_{maks} = m + \frac{3a}{4}\sqrt{3} \text{ dan } x_{min} = m - \frac{3a}{4}\sqrt{3}$$

Dimana masing-masing dicapai saat $\theta = \frac{\pi}{3}$ dan $\theta = \frac{5\pi}{3}$. Karena $x_{maks} = 1$ dan $x_{min} = 0$, maka diperoleh persamaan:

$$m + \frac{3a}{4}\sqrt{3} = 1 \text{ dan } m - \frac{3a}{4}\sqrt{3} = 0$$

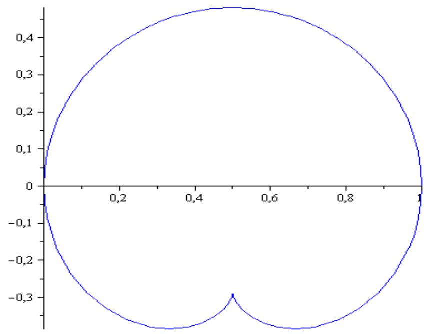
dimana solusinya adalah $m = \frac{1}{2}$ dan $a = \frac{2}{9}\sqrt{3}$. Selain itu, nilai *n* dapat dicari dengan menggunakan fakta bahwa *K* melalui (0,0) dan (1,0), serta $x_{maks} = 1$ terjadi saat $\theta = \frac{\pi}{3}$. Akhirnya, dengan cara mensubstitusikan semua syarat solusi ke persamaan (2), diperoleh $= \frac{\sqrt{3}}{6}$. ■

Jadi, sekarang kita sudah punya sebuah kardioid *K* yang melalui (0,0) dan (1,0), serta memenuhi $x_{maks} = 1$ dan $x_{min} = 0$, dengan:

$$x(\theta) = \frac{1}{2} + \left(\frac{2}{9}\sqrt{3} + \frac{2}{9}\sqrt{3}\cos\theta\right)sin\theta$$

$$y(\theta) = \left(\frac{2}{9}\sqrt{3} + \frac{2}{9}\sqrt{3}\cos\theta\right)cos\theta - \frac{\sqrt{3}}{6}$$

dimana $\theta \epsilon [0..2\pi]$.



Gambar 2. Kardioid *K*

Adapun dengan bantuan program maple, telah diperoleh panjang segmen kardioid K yang menghubungkan (0,0) dan (1,0), sebut l_k , dimana:

$$l_k = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{(x'(\theta))^2 + (y'(\theta))^2} d\theta + \int_{\frac{5\pi}{3}}^{2\pi} \sqrt{(x'(\theta))^2 + (y'(\theta))^2} d\,\theta$$

$$= \frac{2}{9}\sqrt{6}\left(\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{1+\cos\theta}\, d\theta + \int_{\frac{5\pi}{3}}^{2\pi} \sqrt{1+\cos\theta}\, d\,\theta\right) \approx 1.539600718$$

Perhatikan juga bahwa jari-jari koordinat kutub dari kardioid *K* adalah

$$r(\theta) = \frac{2}{9}\sqrt{3} + \frac{2}{9}\sqrt{3}\cos\theta$$

Karena koordinat (1,0) dicapai saat $\theta = \frac{\pi}{3}$, dengan jari-jari kutubnya adalah $\frac{1}{3}\sqrt{3}$. Demikian juga untuk koordinat (0,0)dicapai saat $\theta = \frac{\pi}{3}$, dengan jari-jari kutubnya juga $\frac{1}{3}\sqrt{3}$. Disini telah terbentuk segitiga sama kaki dengan titik-titik sudut yang sama besar terletak pada (0,0) dan (1,0). Salah satu sudut segitiga ini terletak di bawah sumbu x dan berada pada garis $x = \frac{1}{2}$. Dengan menggunakan dalil pytagoras, di peroleh luas dari segitiga ini adalah $\frac{\sqrt{3}}{12}$. Selanjutnya, kita dapat mengetahui luas yang terbentuk diantara segmen kardioid dan sumbu *x* adalah:

$$A_k = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{2}{9}\sqrt{3} + \frac{2}{9}\sqrt{3}\cos\theta\right)^2 d\theta - \frac{\sqrt{3}}{12} \approx 0.3770481343$$

3.3 Preposisi 2

Untuk kasus $l \approx 1.539600718$ pada masalah tongkat dan tali, kurva yang paling dekat bukanlah segmen keluarga elips $4(t - \frac{1}{2})^2 + \frac{x^2}{b^2} = 1$.

Bukti.

Pilih $b \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga $b^2 = \frac{4561.7}{19798}$. Segmen elips ini panjangnya adalah :

$$l_e = \int_0^{1.0} \sqrt{1 + \frac{4562.2(-4x+2)^2}{19798\left(1 - 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2\right)}}\, dx \approx 1.53960128$$

Dengan luas yang dibentuk antara segmen elips dan sumbu x adalah :

$$A_e = \int_0^{1.0} \sqrt{\frac{4562.2}{19798}} \sqrt{1 - 4\left(t - \frac{1}{2}\right)^2}\, dt \approx 0.377021729$$

Karena setiap anggota keluarga elips $4(t - \frac{1}{2})^2 + \frac{x^2}{b^2} = 1$ memiliki 2 sumbu yang sama, yakni berupa sumbu horizontal dan garis $t = \frac{1}{2}$, akibatnya jika semakin pendek segmen elips (yang memenuhi syarat masalah tongkat dan tali), maka semakin kecil luas yang dibentuk oleh sumbu horizontal dan segmen tersebut.Selanjutnya, perhatikan untuk segmen kardioid dengan panjang $l_k \approx 1.539600718$ membentuk luas antara segemen dan sumbu horisontal $A_k \approx 0.3770481343$. Disini jelas segmen kardioid lebih pendek dari segmen elips, akan tetapi luas yang dibentuk oleh segmen kardioid lebih besar dari luas yang dibentuk oleh segmen elips. Hal ini berarti, untuk panjang tali $l \approx 1.539600718$ segmen kardioid membentuk luas yang lebih besar dari segmen elips. Jadi dapat disimpulkan untuk kasus $l \approx 1.539600718$ kurva yang paling dekat dengan solusi masalah tongkat dan tali bukanlah segmen keluarga elips $4(t - \frac{1}{2})^2 + \frac{x^2}{b^2} = 1$. ■

4. Penelitian Selanjutnya

Disini jelas bahwa untuk kasus panjang tali $l \approx 1.539600718$, segmen kardioid membentuk luas yang lebih besar dari segmen elips. Akan tetapi, tidak pada semua kasus panjang tali kita mampu membentuk segmen kardioid dengan jarak kedua titik ujungnya maksimum, sehingga sangat diperlukan penelitian lanjutan untuk mengetahui bagaimana cara memotong masing-masing kardioid atau pun elips agar diperoleh segmen yang memaksimumkan luas antara segmen dan garis lurus yang menghubungkan kedua ujung segmen.

5. DaftarPustaka

[1] V. Blåsjö, The evolution of the isoperimetric problem, *The American Mathematical Monthly* (2005), Vol. **112**, 526-566.

[2] A. Siegel. *A historical review of the isoperimetric theorem in 2-D, and its place in elementary plane geometry*. (2012)

[3] Cherkaev, A. dan Cherkaev, E., *Calculus of Variations and Aplications.* (2003)

[4] I. Pranoto, “On The Stick and Rope Problem”, *Proceeding of ICMSA*, Bali, Indonesia, 2012

[5] M. Mananohas, (2013), *Masalah Tongkat dan Tali,* Magister Thesis, Institut Teknologi Bandung, Indonesia.

[6] M. Mananohas and I. Pranoto, “Masalah Tongkat dan Tali”, *Proceeding of Seminar Nasional matematika, Sains, dan Teknologi Informasi*, Manado, Indonesia, 2013.

[7] M. Mananohas and I. Pranoto, “More Results On The Stick And Rope Problem”, *ICOWOBAS AND RAFFS 2013*, Johor Bahru, Malaysia, 2013.

[8] Purcell, J.Edwin, Dale Varberg dan Steven E. Ringdon. 2004. *Kalkulus Edisi ke delapan*. Jakarta: Erlangga.