Matriks Simplektik dan Hubungannya Pada Sistem Linier Hamiltonian

[1]Artmo Dihartomo Laweangi, [2]Jullia Titaley, [3]Mans Lumiu Mananohas

[1]Program Studi Matematika, FMIPA, UNSRAT, artmodihartomolaweangi@yahoo.com
[2]Program Studi Matematika, FMIPA, UNSRAT, July_titaley@yahoo.com
[3]Program Studi Matematika, FMIPA, UNSRAT, mansmananohas@yahoo.com

Abstrak

Matriks Simplektik dengan pengali μ merupakan matriks sembarang berukuran $2n \times 2n$ yang memenuhi persamaan $T^T J T = \mu J$ dengan J merupakan matriks blok berukuran $2n \times 2n$, yaitu $J = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{I} \\ -\boldsymbol{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$, apabila $\mu = 1$ maka T disebut simplektik. Sedangkan sistem linier Hamiltonian merupakan $2n$ sistem persamaan diferensial dengan bentuk: $\dot{z} = J\frac{\partial H}{\partial z} = JS(t)z = A(t)z$, dimana $H = H(t,z) = \frac{1}{2}\, z^T S(t) z$. Dengan $S(t)$ merupakan matriks simetrik yang kontinu pada sebuah interval q pada $\Re$. Pada penelitian ini didapati bahwa hanya matriks simplektik dengan pengali μ (dimana μ sembarang) yang dapat mentrasformasi sistem linier Hamiltonian $\dot{z} = A(t)z$ ke sebuah sistem linier Hamiltonian yang berpadanan, juga bahwa ada sebuah subgrup dari matriks Hamiltonian yang isomorfik terhadap subgrup matriks simplektik.

Kata kunci: Isomorfik, Matriks Hamiltonian, Matriks Simplektik, Sistem Linier Hamiltonian, Subgrup

Simplectic Matrix and It Relations to Linear Hamiltonian System

Abstract

Simplectic Matrix with multiplier μ is an arbitrary $2n \times 2n$ matrix that satisfy $T^T J T = \mu J$ with J is a $2n \times 2n$ matrix, where $J = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{I} \\ -\boldsymbol{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$. If $\mu = 1$ then T is called only Simplectic. Whereas Linear Hamiltonian system is a $2n$ ordinary differential equations, that satisfy; $\dot{z} = J\frac{\partial H}{\partial z} = JS(t)z = A(t)z$, where $H = H(t,z) = \frac{1}{2}\, z^T S(t) z$, with $S(t)$ is a continu simetric matrix at an interval q in $\Re$. In this research is found that the only matrix that can transform linear Hamiltonian system $\dot{z} = A(t)z$ to another linear Hamiltonian system is a simplectic matrix with multiplier μ, also that there is a subgroup of Hamiltonian matrices that isomorphic to a subgroup of Simplectic matrices.

***Key words**: Isomorphic, Hamiltonian Matrix, Simplectic Matrix, Linear Hamiltonian System, Subgroup*

1. Pendahuluan

Persamaan diferensial adalah sebuah persamaan yang melibatkan fungsi dan turunannya. Persamaan ini memiliki peran yang sangat penting dalam berbagai ilmu, salah satunya adalah Mekanika yaitu ilmu yang menelaah tentang gerak sebuah benda.

Salah satu rumusan yang sangat penting dalam mempelajari gerak suatu benda pada sebuah bidang adalah rumusan berikut ini, $F = ma$ **[1]**. Ini adalah hukum kedua dari ilmuwan besar Inggris sir Isaac Newton. Hal yang senada dari hukum ini mengatakan bahwa, sebuah partikel dengan massa $m > 0$, dengan posisi $q = (q_{1,}q_{2,}q_3) \in \Re^3$, yang bergerak dengan energi potensial sebesar $V(q)$ pada kurva $q(t)$ memenuhi persamaan $m\frac{d^2q}{dt} = -gradV(q)$. Misalkan momentum $p_i = m\frac{dq_i}{dt}$ dan energi $H(q,p) = \left(1/_{2m}\right)\|p\|^2 + V(q)$, maka hukum Newton dapat ditulis sebagai berikut:

$\begin{cases} \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases}$ untuk $i = 1,2,3$. Selanjutnya bila persamaan ini ditulis dalam bentuk matriks maka diperoleh persamaan berikut; $\dot{Z} = J\nabla H(Z)$ dimana $Z = \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix}$ dengan $J = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}$ ditulis dalam bentuk matriks blok dan I merupakan matriks identitas berukuran 3×3 **[2]**. Ternyata sistem persamaan diferensial ini merupakan suatu kasus khusus dari suatu sistem persamaan diferensial biasa orde satu, yang disebut sistem Hamiltonian. Sistem Hamiltonian adalah $2n$ sistem persamaan diferensial biasa orde 1 dalam bentuk $\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}$, $\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q}$ dengan $\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H(t,q,p)}{\partial p_i}$, $\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H(t,q,p)}{\partial q_i}$, dan $H(t,q,p) = H$ disebut sebagai Hamiltonian, yaitu sebuah fungsi mulus bernilai real (anggota C^∞) yang didefinisikan untuk $(t,q,p) \in \Omega$, sebuah himpunan terbuka di $\Re \times \Re^n \times \Re^n$.

Misalkan $Z = \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix}$, $J = J_n = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{I} \\ -\boldsymbol{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$, $\nabla H = \begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial q_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial H}{\partial p_n} \end{bmatrix}$ dimana $\mathbf{0}$ merupakan matriks nol berukuran $n \times n$ dan $\boldsymbol{I}$ merupakan matriks identitas berukuran $n \times n$. Dalam notasi Z, J, dan ∇H maka sistem Hamiltonian ditulis dalam notasi matriks sebagai berikut: $\dot{Z} = J\nabla H$ **[3]**. Selanjutnya bila dilakukan transformasi pada persamaan $\dot{Z} = J\nabla H$ dengan memisalkan $\tau = AZ$ (dimana A adalah matriks ortogonal) maka: $\dot{\tau} = A\dot{Z} = AJ\nabla H(Z) = AJA^T\nabla H(Z(\tau))$, perhatikan bahwa transformasi ini akan menjadi sistem Hamiltonian apabila $AJA^T = J$. Transformasi yang memenuhi keadaan ini disebut kanonikal atau simplektik, (atau sebuah simplektomorfisma) **[2]**. Sementara matriks A yang memenuhi persamaan $AJA^T = \mu J$ disebut sebagai matriks simplektik dengan pengali μ atau matriks simplektik bila $\mu = 1$ **[3]**.

2. Sistem Linier Hamiltonian

Sebuah sistem Hamiltonian adalah $2n$ sistem persamaan diferensial biasa orde 1 dalam bentuk:
$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}$, $\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q}$ dengan $\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H(t,q,p)}{\partial p_i}$, $\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H(t,q,p)}{\partial q_i}$, dimana $H(t,q,p) = H$ disebut sebagai Hamiltonian, yaitu sebuah fungsi bernilai real mulus (anggota C^∞) yang didefinisikan untuk $t, q, p \in \Omega$, sebuah himpunan terbuka di $\Re \times \Re^n \times \Re^n$. Selanjutnya, misalkan

$z = \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \\ p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix}$, $J = J_n = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{I} \\ -\boldsymbol{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$, $\nabla H = \begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial q_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial H}{\partial q_n} \\ \frac{\partial H}{\partial p_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial H}{\partial p_n} \end{bmatrix}$ dimana $\mathbf{0}$ merupakan matriks nol berukuran $n \times n$ dan $\boldsymbol{I}$ merupakan Matriks Identitas berukuran $n \times n$. Dalam notasi z, J,dan ∇H sistem Hamiltonian ditulis sebagai berikut: $\dot{z} = J\nabla H$.

Definisi 2.1
Misalkan z merupakan kordinat vektor pada $\Re^{2n}$ dan q adalah sebuah interval pada $\Re$ dan $S(t): q \to M(2n, \Re)$ kontinu dan simetrik, dimana $M(2n, \Re)$ merupakan matriks berukuran $2n \times 2n$ dengan entri seluruhnya adalah bilangan real. Suatu sistem linier Hamiltonian adalah sebuah sistem $2n$ persamaan diferensial biasa dalam bentuk: $\dot{z} = J\frac{\partial H}{\partial z} = JS(t)z = A(t)z$ dimana $H = H(t,z) = \frac{1}{2} z^T S(t) z$, dengan matriks A berukuran $2n \times 2n$ (dimana $A = JS$ dan S

merupakan sebuah matriks simetrik) yang disebut sebagai matriks Hamiltonian atau *infinitesimally symplectic* **[3]**.

Definisi 2.2
Himpunan semua matriks Hamiltonian adalah himpunan semua matriks yang memenuhi persamaan $A^TJ + JA = 0$ **[4]** atau $AJ = (AJ)^T$ **[5]**. Sementara himpunan semua matriks $2n \times 2n$ yang memenuhi persamaan $AJ = -(AJ)^T$ disebut himpunan matriks *skew Hamiltonian* **[5]**.

3. Matriks Simplektik

Sebuah matriks T berukuran $2n \times 2n$ disebut simplektik dengan pengali μ (dimana $\mu \neq 0$) apabila $T^TJT = \mu J$. Bila $\mu = 1$ maka T disebut simplektik **[3]**.

4. Teori Grup

Definisi 4.1
Misalkan G merupakan sebuah himpunan yang didalamnya terdapat sebuah operasi biner (biasanya disebut perkalian) yang memetakan setiap pasangan berurut $(a, b) \in G$ ke sebuah elemen G yang disimbolkan ab. Kita katakan G merupakan grup yang tertutup dibawah operasi biner ini, apabila memenuhi aturan berikut:

a. *Asosiatif*. Operasi biner pada G bersifat asosiatif; yaitu $(ab)c = a(bc)$, berlaku untuk semua $a, b, c \in G$.
b. *Identitas*. Ada sebuah elemen e (disebut identitas) dari G yang sedemikian sehingga $ae = ea = a$ untuk semua $a \in G$.
c. *Invers.* Untuk setiap a yang merupakan elemen di G ada b yang juga merupakan elemen di G (disebut invers dari a) yang sedemikian sehingga $ab = ba = e$.

Definisi 4.2
Sebuah himpunan H, dimana $H \subseteq G$, dikatakan sebuah subgrup apabila H sendiri merupakan sebuah grup dibawah operasi biner pada G.

Definisi 4.3
Sebuah isomorfisma φ dari sebuah grup G ke sebuah grup K, adalah sebuah fungsi satu-satu dari G pada K yang bersifat mempertahankan operasi pada kedua grup. Yaitu:

$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) \text{ untuk semua } a, b \in G.$$

Apabila ada sebuah isomorfisma dari G pada K, maka kita katakan G dan K isomorfik (disimbolkan $G \approx K$) **[6]**.

5. Metodologi Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah dengan melakukan studi pustaka atau literatur dengan tahapan sebagai berikut:

a. Mencari kaitan sistem linier Hamiltonian dengan matriks simplektik dalam hal transformasi linier.
b. Mencari matriks yang dapat mendiagonalkan matriks Hamiltonian menjadi matriks diagonal Hamiltonian.
c. Membentuk sebuah grup matriks Hamiltonian terhadap penjumlahan matriks biasa dan membentuk grup matriks simplektik terhadap perkalian matriks biasa.
d. Mencari subgrup dari grup matriks Hamiltonian dan grup matriks simplektik yang saling isomorfik.

6. Hasil dan Pembahasan

6.1. Transformasi Linier pada sistem Linier Hamiltonian.

Teorema 6.1.1

a. Apabila M merupakan matriks simplektik dengan pengali μ_1, maka sistem yang diperoleh dengan transformasi $z = M(t)u$ pada sistem linier Hamiltonian $\dot{z} = Az$ yaitu; $\dot{v} = Wv$ (dimana W $W = M^{-1}AM - M^{-1}\dot{M}$), juga merupakan sistem linier Hamiltonian dengan Hamiltonian $H = H(t,v) = \frac{1}{2}\, v^T \left\{ \frac{1}{\mu_1} M^T SM + \frac{1}{\mu_1} M^T J\dot{M} \right\} v$.
b. Sebaliknya apabila $\dot{v} = Wv$ (dimana $W = M^{-1}AM - M^{-1}\dot{M}$), merupakan sistem linier Hamiltonian yang berpadanan dengan setiap sistem linier Hamiltonian $\dot{z} = Az$, maka M merupakan sembarang matriks simplektik dengan pengali μ **[3]**.

Akibat 6.1.1

Apabila F merupakan matriks simplektik dengan pengali μ, maka ada sebuah sistem linier Hamiltonian dimana F merupakan solusi sistem ini.

Teorema 6.1.2

Misalkan A merupakan matriks real Hamiltonian yang berukuran $2n \times 2n$ dengan nilai eigen yang berbeda-beda sebagai berikut λ_1, λ_2, λ_3,…, λ_n, $-\lambda_1$, $-\lambda_2$, $-\lambda_3$,…, $-\lambda_n$, maka akan selalu ada sebuah matriks simplektik P dengan pengali μ yang sedemikian sehingga $P^{-1}AP = R$ dengan R adalah sebuah matriks diagonal yang diagonalnya adalah λ_1, λ_2, λ_3,…, λ_n, $-\lambda_1$, $-\lambda_2$, $-\lambda_3$,…, $-\lambda_n$, yang tersusun berurutan atau pun tidak.

6.2. Grup Isomorfik Matriks Hamiltonian.

Teorema 6.2.1

Himpunan $H_n = \{(A)_{2n\times 2n} | A^T J + JA = \mathbf{0}, n \in \mathbb{N}\}$ dimana entri dari A adalah bilangan real dan $J = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{I} \\ -\boldsymbol{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$, membentuk sebuah grup komutatif (*Abelian Group*) dibawah penjumlahan matriks biasa.

Teorema 6.2.2

Himpunan $G_n = \{(T)_{2n\times 2n} | T^T JT = \mu J, \mu \in \Re, n \in \mathbb{N}\}$ dimana entri dari T adalah bilangan real dan $J = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{I} \\ -\boldsymbol{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$, membentuk sebuah grup dibawah perkalian matriks biasa.

Teorema 6.2.3

Himpunan $L_n = \left\{ F_{(2n\times 2n)} | F^T JF = J,\ n \in \mathbb{N} \right\}$ dimana entri dari F adalah bilangan real dan $J_{(2n\times 2n)} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{I} \\ -\boldsymbol{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$, membentuk sebuah subgrup dari grup G_n**[3]** *(Latihan soal, No.10e, halaman 67).*

Teorema 6.2.4

Himpunan $S_n = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} | n \in \mathbb{Z} \right\}$, membentuk sebuah subgrup dari grup L_1, dimana

$$L_1 = \left\{ (F)_{2\times 2} | F^T JF = J; F = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} a, b, c, d \in \Re \right\}.$$

Teorema 6.2.5

Himpunan $Z_n = \left\{ \begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & -n \end{bmatrix} | n \in \mathbb{Z} \right\}$, membentuk sebuah subgrup dari grup H_1, dimana

$$H_1 = \left\{ (A)_{2\times 2} | A^T J + JA = \mathbf{0}; A = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} e, f, g, h \in \Re \right\}.$$

Teorema 6.2.6
Grup S_n isomorfik dengan grup Z_n.

Teorema 6.2.7
Himpunan $S_{(m,n)} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & m & 0 \\ 0 & 1 & 0 & n \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} | m,n \in \mathbb{Z} \right\}$, membentuk sebuah subgrup dari grup L_2, dimana $L_2 = \left\{ (F)_{4\times 4} | F^T J F = J; F = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} \end{bmatrix}, f_{ij} \in \Re \right\}$.

Teorema 6.2.8
Himpunan $Z_{(m,n)} = \left\{ \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -n \end{bmatrix} | m,n \in \mathbb{Z} \right\}$, membentuk sebuah subgrup dari grup H_2, dimana

$$H_2 = \left\{ (A)_{4\times 4} | A^T J + JA = \mathbf{0}; A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}, a_{ij} \in \Re \right\}.$$

Teorema 6.2.9
Grup $S_{(m,n)}$ isomorfik dengan grup $Z_{(m,n)}$.

Pada akhirnya dapat ditunjukan bahwa $Z_{(m_1,m_2,\dots,m_n)}$ merupakan subgrup dari H_n dan $S_{(m_1,m_2,\dots,m_n)}$ merupakan subgrup dari L_n untuk $n \geq 3$. Kedua subgrup ini saling isomorfik dengan isomorfisma $\Psi\left(Z_{(m_1,m_2,\dots,m_n)}\right) = S_{(m_1,m_2,\dots,m_n)}$. Juga bahwa $Z_{(m_1,m_2,\dots,m_n)}$, isomorfik dengan grup $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times \cdots \times \mathbb{Z}$ yaitu $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times \cdots \times \mathbb{Z} = \{(m_1, m_2, \dots, m_n) | m_1, m_2, \dots, m_n \in \mathbb{Z}; (m_1, m_2, \dots, m_n) + (n_1, n_2, \dots, n_n) = (m_1 + n_1, m_2 + n_2, \dots, m_n + n_n)\}$ dengan isomorfisma:
$\xi(m_1, m_2, \dots, m_n) = Z_{(m_1,m_2,\dots,m_n)}$.

6.3. Grup Isomorfik Matriks *Skew Hamiltonian*

Teorema 6.3.1
Himpunan $\left\{ Z_n{}^* = \begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix} | n \in \mathbb{Z} \right\}$ merupakan grup matriks *Skew Hamiltonian* terhadap penjumlahan matriks biasa.

Teorema 6.3.2
Himpunan $\left\{ Z_{(mn)}{}^* = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n \end{bmatrix} | m,n \in \mathbb{Z} \right\}$ merupakan grup matriks *Skew Hamiltonian* terhadap penjumlahan matriks biasa.

Teorema 6.3.3
Himpunan $Z_n{}^*$ isomorfisma terhadap himpunan Z_n dengan isomorfisma $\wp(Z_n{}^*) = Z_n$.

Teorema 6.3.4
Himpunan $Z_{(mn)}{}^*$ isomorfisma terhadap himpunan $Z_{(mn)}$ dengan isomorfisma
$\wp^*(Z_{(mn)}{}^*) = Z_{(mn)}$.

7. Kesimpulan

Dari penelitian yang dilakukan diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Matriks simplektik dengan pengali μ, merupakan satu-satunya matriks yang dapat mentransformasi sistem linier Hamiltonian ke sistem linier Hamiltonian yang berpadanan.
2. Matriks simplektik dengan pengali μ, merupakan satu-satunya matriks yang dapat Mendiagonalkan matriks Hamiltonian ke matriks diagonal Hamiltonian yang berpadanan.
3. Setiap matriks simplektik dengan pengali μ, merupakan solusi dari sebuah sistem linier Hamiltonian yang berpadanan.
4. Untuk setiap grup Matriks hamiltonian dibawah penjumlahan mariks biasa dan setiap grup matriks simplektik dibawah perkalian matriks biasa ada sebuah subgrup matriks Hamiltonian yang isomorfik dengan subgrup matriks simplektik.

8. Daftar Pustaka

[1] Halliday and Resnic. 2008. *Fundamentals of Physics. 8th Edition*. John Wiley and Sons, New Jersey.

[2] Abraham, R and J. E. Marsden. 1978. *Foundations of Mechanics. 2nd Edition.* Edison-Wesley, Canada.

[3] Meyer, K.R., et al. 2009. *Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-Body Problem. 2th Edition.* Springer Science+Business Media, New York.

[4] Rink. B and T. Tuwankotta. 2003. Stability in Hamiltonian System: *Proceedings of The Mechanics and Symmetry, Peyreq, Sept 2000*. http://www.math.uu.nl/publications/preprints/1166.ps.gz [10 September 2014]

[5] Mehrmann, V and H, Xu. 2008. Pertubation of Purely Imaginary Eigen Values of Hamiltonian Matrices Under Structured Pertubations. *Electronic Journal of Linear Algebra. A Publication of the International Linear Algebra Society,* 17(5): 234 – 257.

[6] Gallian. J. A. 2010. *Contemporary Abstract Algebra. 7th Edition.* BROOKS/COLE, CENGAGE Learning, California.