Subring dan *Ideal* pada *Ring* JR-2CN dan JR-3CN

[1]Julana S. Rarung, [2]Mans L. Mananohas, [3]Luther Latumakulita

[1]Program Studi Matematika, FMIPA, UNSRAT, julanastefani@gmail.com
[2]Program Studi Matematika, FMIPA, UNSRAT, mansmananohas@yahoo.com
[3]Program Studi Matematika, FMIPA, UNSRAT, latumakulitala@unsrat.ac.id

Abstrak

Ring adalah himpunan dengan dua operasi biner dan memenuhi semua aksioma *Ring*. Adapun dua himpunan yang telah dibuktikan bahwa keduanya merupakan *Ring* yaitu, himpunan pasangan terurut dari bilangan bulat baru JR – 2CN dan JR – 2CN. Dalam tulisan ini, akan ditunjukkan beberapa *Subring* maupun *Ideal* pada *Ring* JR – 2CN dan JR – 2CN.

Kata kunci : *Ideal*, JR – 2CN, JR – 2CN, *Subring*

Subring and Ideal Of Ring JR-2CN and JR-3CN

Abstract

Ring is set with two binary operations and satisfy all of axioms Ring. There are two sets that was proven that both of them are Ring that are sets ordered pairs of new integer, JR-2CN and JR-3CN. In this research, will be shown some Subring and Ideal of Ring $JR-2CN$ *and* $JR-3CN$.

***Key words** : Ideal,* $JR-2CN$, $JR-3CN$, *Subring*

1. Pendahuluan

Ring adalah himpunan dengan dua operasi biner dan memenuhi semua aksioma *Ring*. Salah satu contoh himpunan yang merupakan *Ring* adalah Himpunan bilangan Bulat. Pada tahun 2010, Rand Alfaris dan Hailiza Kamarulhaili menemukan himpunan dua pasangan terurut dari bilangan bulat baru $\mathrm{JR}-2\mathrm{CN}$ dan $\mathrm{JR}-3\mathrm{CN}$. $\mathrm{JR}-2\mathrm{CN}$ merupakan himpunan bilangan bulat yang dapat ditulis dalam bentuk penjumlahan 2 bilangan bulat berpangkat 3. Sedangkan, $\mathrm{JR}-3\mathrm{CN}$ merupakan himpunan bilangan bulat yang dapat ditulis dalam bentuk perjumlahan 3 bilangan bulat berpangkat 3. Dua himpunan bilangan bulat $JR-2CN$ dan $\mathrm{JR}-3\mathrm{CN}$ merupakan grup Abelian serta keduanya isomorfik [1]. Grup abelian baru ini rencananya akan diterapkan dalam Kriptografi khususnya dalam keamanan kunci publik. Hasil riset sebelumnya membuktikan bahwa $\mathrm{JR}-2\mathrm{CN}$ dan $\mathrm{JR}-3\mathrm{CN}$ adalah *Ring* dan Lapangan [2].

Berdasarkan penelusuran pustaka, kerja riset yang masih perlu dilakukan berkaitan dengan tipe *Ring* ini adalah mengkaji *Subring* dan *Ideal* dari *Ring* $\mathrm{JR}-2\mathrm{CN}$ dan $\mathrm{JR}-3\mathrm{CN}$.

2. *Subring* dan *Ideal*

Definisi 1 (*Subring*)
Sebuah subset *S* pada suatu *Ring R*, disebut *Subring* pada *R* jika *S* juga memenuhi semua aksioma *Ring* [3].

Teorema 1
Sebuah subset *S* pada suatu *Ring R* disebut *Subring* pada *R* jika memenuhi [3] :
1. $0 \in S$,
2. Untuk setiap $x, y \in S$, maka $x-y \in S$,
3. Untuk setiap $x, y \in S$, maka $xy \in S$

Definisi 2 *(Ideal)*
Suatu *Subring* N dari *Ring* R yang bersifat $a\mathrm{N} \subseteq \mathrm{N}$ dan $\mathrm{N}b \subseteq \mathrm{N}$, $\forall\, a, b \in R$ disebut *Ideal* [4].

3. $\mathbf{JR-2CN}$

Setiap anggota dari $JR-2CN$ adalah dua pasangan terurut yang komponennya adalah dua bilangan bulat (j,r) [4].

$JR-2CN = \{ (j,r) \in Z \text{ X } Z : j^3+r^3 = 6\alpha x^2 + 2\alpha^3$ dimana $j = x + \alpha,\ r = \alpha - x \quad \forall\, \alpha, x \in Z\}$

Definisi 3

$\forall\, (j_1, r_1), (j_2, r_2) \in JR-2CN$ dimana, $j_i = x_i + \alpha_i$ dan $r_i = \alpha_i - x_i$ untuk $i = 1,2$ maka terhadap operasi $\oplus_{JR-2CN}$ berlaku [1] :

$$(j_1, r_1) \oplus_{JR-2CN} (j_2, r_2) = (j_1 + j_2, r_1 + r_2)$$

Jika dan hanya jika,

$$(j_1 + j_2)^3 + (r_1 + r_2)^3 = 6(\alpha_1+\alpha_2)\,(x_1+x_2)^2 + 2(\alpha_1 + \alpha_2)^3$$

$\mathrm{JR}-2\mathrm{CN}$ memiliki elemen nol (0,0) untuk setiap elemen (j,r).

Definisi 4

Untuk setiap $(j_1, r_1), (j_2, r_2) \in JR-2CN$ dimana, $j_i = x_i + \alpha_i$ dan $r_i = \alpha_i - x_i, \forall\, i = 1,2$. Berlaku [2] :

$$(j_1, r_1) \odot_{JR-2CN} (j_2, r_2) = \left(\frac{j_1 \cdot j_2 + r_1 \cdot r_2}{2}, \frac{j_1 \cdot r_2 + j_2 \cdot r_1}{2}\right)$$

Jika dan hanya jika,

$$(j_1 + j_2)^3 + (r_1 + r_2)^3 = 6(\alpha_1 . \alpha_2)\,(x_1 \cdot x_2)^2 + 2(\alpha_1 \cdot \alpha_2)^3$$

$\mathrm{JR}-2\mathrm{CN}$ memiliki elemen satuan (2,0) untuk setiap elemen (j,r).

4. $\mathbf{JR-3CN}$

Setiap anggota dari grup $JR-3CN$ terdiri dari pasangan terurut $(j,r)_\alpha$, yang didefinisikan sebagai berikut [4] :

$JR-3CN = \{ (j,r) \in Z \text{ X } Z : j^3 + r^3 - \alpha^3 = 3\alpha r^2 - 3\alpha^2 r$, dimana $j = \alpha - r \quad \forall\, \alpha, r \in Z\}$.

Definisi 5

$\forall\ (j_1, r_1)_{\alpha_1}, (j_2, r_2)_{\alpha_2} \in \mathrm{JR}-3\mathrm{CN}$ dimana, $j_i = \alpha_i - r_i,$ untuk $i = 1,2$. $\oplus_{JR-3CN}$ definisikan pada $JR-3CN$ sedemikian sehingga [1],

$$(j_1, r_1)_{\alpha_1} \oplus_{JR-3CN} (j_2, r_2)_{\alpha_2} = (j_1 + j_2, r_1 + r_2)_{\alpha_1 + \alpha_2}$$

Jika dan hanya jika,

$$(j_1, j_2)^3 + (r_1 + r_2)^3 - (\alpha_1 + \alpha_2)^3 = 3(\alpha_1+\alpha_2)\,(r_1 + r_2)^2 - 3(\alpha_1 + \alpha_2)^2 (r_1 + r_2).$$

$\mathrm{JR}-3\mathrm{CN}$ memiliki elemen nol $(0,0)_0$ untuk setiap elemen $(j,r)_\alpha$.

Definisi 6

Untuk setiap, $(j_1, r_1)_{\alpha_1}, (j_2, r_2)_{\alpha_2} \in \mathrm{JR}-3\mathrm{CN}$ dimana, $j_i = \alpha_i - r_i$ untuk $i = 1, 2$ terhadap operasi biner $\odot_{JR-3CN}$ berlaku [2],

$$(j_1, r_1)_{\alpha_1} \odot_{JR-3CN} (j_2, r_2)_{\alpha_2} = (j_1 . j_2 + j_1 . r_2 + j_2 . r_1\ , r_1 \cdot r_2)_{\alpha 1 \cdot \alpha 2}$$

Jika dan hanya jika,

$$(j_1, j_2)^3 + (r_1 + r_2)^3 - (\alpha_1 + \alpha_2)^3 = 3(\alpha_1 . \alpha_2)\,(r_1 \cdot r_2)^2 - 3(\alpha_1 \cdot \alpha_2)^2 (r_1 \cdot r_2)$$

$\mathrm{JR}-3\mathrm{CN}$ memiliki elemen satuan $(0,1)_1$ untuk setiap elemen $(j,r)_\alpha$.

5. Metode Penelitian

Penelitian ini dilakukan berdasarkan studi literatur berupa buku-buku dan jurnal-jurnal ilmiah mengenai *Ring* $\mathrm{JR}-2\mathrm{CN}$ dan $\mathrm{JR}-3\mathrm{CN}$.

6. Hasil dan Pembahasan

6.1 Beberapa contoh *Subring* dari ($\mathbf{JR}-\mathbf{2CN}$, $\oplus_{\mathbf{JR-2CN}}, \odot_{\mathbf{JR-2CN}}$) dan ($\mathbf{JR}-\mathbf{3CN}$, $\oplus_{\mathbf{JR-3CN}}, \odot_{\mathbf{JR-3CN}}$)

Contoh *Subring* pada $\mathrm{JR}-2\mathrm{CN}$ yaitu :

Preposisi 1
$(K, \oplus_{JR-2CN}, \odot_{JR-2CN})$ dimana $K = \{(j,j) \in JR-2CN, \forall\, j \in \mathbb{Z}\}$

Bukti
1. Misalkan $(m,m) \in K$ sembarang, disini jelas ada elemen nol $(0,0) \in K$. sehingga,

$$(m,m) \oplus_{JR-2CN}(0,0) = (m+0, m+0) = (m,m).$$

2. Akan ditunjukkan, $(m,m) \oplus_{JR-2CN} (-n,-n) = (m-n, m-n) \in K$ $\forall\, (m,m),(n,n) \in K$ dimana,

$$m = x_1 + \alpha_1 \quad (1)$$
$$m = \alpha_1 - x_1 \quad (2)$$

Dengan mensubtitusi persamaan (1) dan (2), diperoleh $m = \alpha_1$ dan $x_1 = 0$ untuk setiap $\alpha_1 \in \mathbb{Z}$. Sedangkan untuk (n,n) yaitu,

$$n = x_2 + \alpha_2 \quad (3)$$
$$n = \alpha_2 - x_2 \quad (4)$$

Dengan cara yang sama diperoleh $n = \alpha_2$ dan $x_2 = 0$, untuk setiap $\alpha_2 \in \mathbb{Z}$. Akibatnya berlaku,

$$\begin{aligned}(m-n)^3 + (m-n)^3 &= (\alpha_1-\alpha_2)^3 + (\alpha_1-\alpha_2)^3\\ &= 2(\alpha_1-\alpha_2)^3\\ &= 0 + 2(\alpha_1-\alpha_2)^3\\ &= 6(\alpha_1-\alpha_2).0^2 + 2(\alpha_1-\alpha_2)^3\\ &= 6(\alpha_1-\alpha_2)(x_1-x_2)^2 + 2(\alpha_1-\alpha_2)^3\end{aligned}$$

Perhatikan , disini jelas terdapat $x = x_1 - x_2 = 0$ dan $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2 \in \mathbb{Z}$, sehingga dapat diklaim $(m,m) \oplus_{JR-2CN} (-n,-n) = (m-n, m-n) \in K$.

3. Akan ditunjukkan $(m,m)\odot_{JR-2CN}(n,n) \in K$, $\forall\, (m,m),(n,n) \in K$. dari definisi 4 diperoleh,

$$\begin{aligned}(m,m)\odot_{JR-2CN}(n,n) &= (\frac{m\cdot n + m\cdot n}{2}, \frac{m\cdot n + m\cdot n}{2})\\ &= \left(\frac{2\,(m\cdot n)}{2}, \frac{2(m\cdot n)}{2}\right)\\ &= (m\cdot n, m\cdot n)\end{aligned}$$

Dengan mensubtitusi persamaan (1) dan (2), dan persamaan (3) dan (4). Akibatnya,

$$\begin{aligned}(m\cdot n)^3 + (m\cdot n)^3 &= (\alpha_1\cdot\alpha_2)^3 + (\alpha_1\cdot\alpha_2)^3\\ &= 2\,(\alpha_1\cdot\alpha_2)^3\\ &= 0 + 2(\alpha_1\cdot\alpha_2)^3\\ &= 6(\alpha_1\cdot\alpha_2)\cdot 0^2 + 2(\alpha_1\cdot\alpha_2)^3\\ &= 6(\alpha_1\cdot\alpha_2)\cdot(x_1\cdot x_2)^2 + 2(\alpha_1\cdot\alpha_2)^3\end{aligned}$$

Karena, ada $x = x_1.x_2 = 0 \in \mathbb{Z}$ dan $\alpha = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \in \mathbb{Z}$, maka jelas :

$$(m,m)\odot_{JR-2CN}(n,n) = (mn\,, mn) \in K.$$

Preposisi 2
$(M, \oplus_{\text{JR}-2\text{CN}}, \odot_{\text{JR}-2\text{CN}})$ dimana $M = \{(j, -j) \in \text{JR}-2\text{CN}, \forall\, j \in \mathbb{Z}\}$

Bukti.
akan ditunjukkan M merupakan *Subring* pada JR $-$ 2CN. Perhatikan bahwa:

1. Misalkan, $(j_1, -j_1) \in M$ sembarang maka ada elemen nol (0,0) $\in M$ sehingga berlaku,

$$(j_1, -j_1) \oplus_{JR-2CN} (0,0) = (j_1, -j_1)$$

2. Akan ditunjukkan berlaku untuk setiap pernyataan berikut:

$$\forall\, (j_1, -j_1),\ (j_2, -j_2) \in M \Rightarrow (\ (j_1, -j_1) \oplus_{\text{JR}-2\text{CN}} \big(-j_2, -(-j_2)\big) \in M.$$

Dari definisi 3 diperoleh:

$$(j_1, -j_1) \oplus_{\text{JR}-2\text{CN}} \big(-j_2, -(-j_2)\big) = (j_1 - j_2, -(j_1 - j_2))$$

Selanjutnya, misalkan, $j_1 = x_1 + \alpha_1$ dan $-j_1 = \alpha_1 - x_1$. Dengan mensubtitusi kedua persamaan tersebut diperoleh $j_1 = x_1$ dan $\alpha_1 = 0$. Misalkan juga $j_2 = x_2 + \alpha_2$ dan $-j_2 = \alpha_2 - x_2$. Dengan cara yang sama, diperoleh $j_2 = x_2$ dan $\alpha_2 = 0$. sehingga, berlaku:

$$(j_1 - j_2)^3 + (-(j_1 - j_2))^3 = 6(\alpha_1 - \alpha_2)(\,x_1 - x_2)^2 \text{-}\ 2(\alpha_1 - \alpha_2)^3$$
$$= 6(0) \cdot (\,x_1 - x_2)^2 - 2(0)^3$$

Karena, terdapat $\alpha = 0 \in \mathbb{Z}$ dan $x = x_1 - x_2 \in \mathbb{Z}$. sehingga jelas,

$$(\ (j_1, -j_1) \oplus_{JR-2CN} \big(-j_2, -(-j_2)\big) = (j_1 - j_2, -(j_1 - j_2)) \in M.$$

3. untuk setiap $(j_1, -j_1), (j_2, -j_2) \in M$ akan ditunjukkan, $(j_1, -j_1) \odot_{JR-2CN} (j_2, -j_2) \in M$. Dengan menggunakan Definisi 4 ($\odot_{JR-2CN}$) diperoleh,

$$(j_1, -j_1) \odot_{JR-2CN} (j_2, -j_2) = \left(\frac{j_1 \cdot j_2 + (-j_1) \cdot (-j_2)}{2}, \frac{j_1 \cdot (-j_2) + j_2 \cdot (-j_1)}{2}\right)$$
$$= (j_1 \cdot j_2, -(j_1 \cdot j_2))$$

Perhatikan bahwa,

$$(j_1 \cdot j_2)^3 + (-(\,j_1 \cdot j_2)^3 = 6(\alpha_1 \cdot \alpha_2)(x_1 \cdot x_2)^2 - (\alpha_1 \cdot \alpha_2)^3$$
$$= 6(0) \cdot (x_1 \cdot x_2)^2 - (0)^3$$

Karena ada $\alpha = 0 \in \mathbb{Z}$, $x = x_1 \cdot x_2 \in \mathbb{Z}$. sehingga dapat diklaim bahwa:

$$(j_1, -j_1) \odot_{\text{JR}-2\text{CN}} (j_2, -j_2) = (\,j_1 \cdot j_2, -(j_1 \cdot j_2)) \in M.$$

Contoh *Subring* pada JR $-$ 3CN yaitu,

Preposisi 3
(S, $\oplus_{JR-3CN}, \odot_{JR-3CN}$) dimana $S = \{(-r, r)_0 \in \text{JR}-3\text{CN} : \forall\, r \in \mathbb{Z}\}$

Bukti.
akan dibuktikan S adalah *Subring* dari JR $-$ 3CN. Perhatikan,

1. Misalkan, $(-r, r)_0 \in S$, maka ada elemen $(0,0)_0 \in S$, sehingga berlaku:

$$(-r, r)_0 \oplus_{JR-3CN} (0,0)_0 = (-r + 0, r + 0)_0$$
$$= (-r, r)_0$$

2. Akan ditunjukkan $\forall(-r_1, r_1)_0, (-r_2, r_2)_0 \in S$, berlaku :

$$(-r_1, r_1)_0 \oplus_{JR-3CN} (-(-r_2, r_2)_0) \in S$$

Perhatikan bahwa:

$$(-r_1, r_1)_0 \oplus_{JR-3CN} (r_2, -r_2)_0 = (-r_1 + r_2, r_1 - r_2)_0$$
$$= (-(r_1 - r_2), r_1 - r_2)_0$$

Karena, $-(r_1 - r_2) \in \mathbb{Z}$, dan $r_1 - r_2 \in \mathbb{Z}$, maka dapat disimpulkan:

$$(-r_1, r_1)_0 \oplus_{JR-3CN} (-r_2, r_2)_0 \in S.$$

3. akan ditunjukkan $\forall\ (-r_1, r_1)_0, (-r_2, r_2)_0 \in S$, berlaku:

$$(-r_1, r_1)_0 \odot_{JR-3CN} (-r_2, r_2)_0 \in S$$

Selanjutnya, misalkan $(-r_1, r_1)_0 \in S$, $(-r_2, r_2)_0 \in S$, sehingga diperoleh:

$$(-r_1, r_1)_0 \odot_{JR-3CN} (-r_2, r_2)_0 = (-r_1 \cdot -r_2 + r_1 \cdot (-r_2) + (-r_2) \cdot r_1, r_1 \cdot r_2)_0$$
$$= (r_1 \cdot r_2 - 2(r_1 \cdot r_2), r_1 \cdot r_2)_0$$
$$= (-(r_1 \cdot r_2), r_1 \cdot r_2)_0$$

Karena, $-(r_1 \cdot r_2) \in \mathbb{Z}$ dan $r_1 \cdot r_2 \in \mathbb{Z}$. maka dapat diklaim bahwa,

$$(-r_1, r_1)_0 \odot_{JR-3CN} (-r_2, r_2)_0 \in S.$$

6.2 Beberapa contoh *Ideal* dari $(\mathbf{JR-2CN}, \oplus_{\mathbf{JR-2CN}}, \odot_{\mathbf{JR-2CN}})$ dan $(\mathbf{JR-3CN}, \oplus_{\mathbf{JR-3CN}}, \odot_{\mathbf{JR-3CN}})$

Contoh *Ideal* pada $\mathrm{JR-2CN}$ yaitu :

Preposisi 4

Subring $(K, \oplus_{JR-2CN}, \odot_{JR-2CN})$ dengan $K = \{(k, k) \in \mathrm{JR-2CN}, \forall\ k \in \mathbb{Z})$

Bukti.
Akan ditunjukkan K adalah *Ideal* dari $\mathrm{JR-2CN}$
Misalkan, $(j, r) \in \mathrm{JR-2CN}$ dan $(k, k) \in K$. Dimana,

$$j = x + \alpha \tag{5}$$
$$r = \alpha - x \tag{6}$$

dan

$$k = x' + \alpha' \tag{7}$$
$$k = \alpha' - x' \tag{8}$$

Untuk setiap, $x, x', \alpha, \alpha' \in \mathbb{Z}$. Dengan mengeliminasi persamaan (7) dan (8), didapat $x' = 0$ dan $k = \alpha'$. Sehingga,

$$(j, r) \odot_{JR-2CN} (k, k) = (\tfrac{jk+rk}{2}, \tfrac{jk+kr}{2})$$

Perhatikan,

$$\left(\frac{jk + rk}{2}\right)^3 + \left(\frac{jk + kr}{2}\right)^3 = \left(\frac{(x+\alpha)\cdot\alpha' + (\alpha - x)\cdot\alpha'}{2}\right)^3 + \left(\frac{(x+\alpha)\cdot\alpha' + \alpha'\cdot(\alpha - x)}{2}\right)^3$$
$$= \left(\frac{2\alpha\alpha'}{2}\right)^3 + \left(\frac{2\alpha\alpha'}{2}\right)^3$$
$$= (\alpha\alpha')^3 + (\alpha\alpha')^3$$
$$= 2(\alpha\alpha')^3$$
$$= 0 + 2(\alpha\alpha')^3$$
$$= 6(\alpha\alpha')(0)^2 + 2(\alpha\alpha')^3$$

Jelas $\alpha\alpha' \in \mathbb{Z}$, sehingga dapat disimpulkan bahwa $\left(\frac{jk+rk}{2}, \frac{jk+kr}{2}\right) \in \mathrm{JR}-2\mathrm{CN}$. Hal ini juga berarti telah terbukti $(j,r) \odot_{JR-2CN} (k,k) \subseteq K$, sehingga dapat disimpulkan K merupakan *Ideal* kiri dari $\mathrm{JR}-2\mathrm{CN}$.

Selanjutkan, akan ditunjukkan *Subring* K juga merupakan *Ideal* kanan dari $JR-2CN$ atau akan ditunjukkan $K \odot (j,r) \subseteq K$. Misalkan, untuk sebarang $(j,r) \in JR-2CN$ menggunakan persamaan (5) dan (6) dan untuk sebarang (k,k) menggunakan persamaan (7) dan (8) diperoleh $x'=0$ dan $k=\alpha'$ sehingga berlaku:

$$\begin{aligned}(k,k) \odot_{\mathrm{JR}-2\mathrm{CN}} (j,r) &= \left(\frac{kj+kr}{2}, \frac{kr+jk}{2}\right)\\ &= \left(\frac{\alpha'\cdot(x+\alpha)+\alpha'\cdot(\alpha-x)}{2}, \frac{\alpha'\cdot(\alpha-x)+\alpha'\cdot(x+\alpha)}{2}\right)\\ &= \left(\frac{2(\alpha'\alpha)}{2}, \frac{2(\alpha'\alpha)}{2}\right)\\ &= (\alpha'\alpha, \alpha'\alpha)\end{aligned}$$

Perhatikan :

$$\begin{aligned}\left(\frac{kj+kr}{2}\right)^3 + \left(\frac{kr+jk}{2}\right)^3 &= (\alpha'\alpha)^3 + (\alpha'\alpha)^3\\ &= 0 + 2(\alpha'\alpha)^3\\ &= 6(\alpha'\alpha)(0)^2 + 2(\alpha'\alpha)^3\end{aligned}$$

Karena $\alpha\alpha' \in \mathbb{Z}$, maka berlaku $(k,k) \odot_{JR-2CN} (j,r) \subseteq K$, sehingga dapat disimpulkan bahwa K merupakan *Ideal* kanan.

Preposisi 5

Subring $(M, \oplus_{\mathrm{JR}-2\mathrm{CN}}, \odot_{\mathrm{JR}-2\mathrm{CN}})$ dengan $M = \{(m,-m) \in JR-2CN,\ \forall\, m \in \mathbb{Z}\}$

Bukti

Akan ditunjukkan M adalah *Ideal* pada $\mathrm{JR}-2\mathrm{CN}$. Misalkan $(j,r) \in \mathrm{JR}-2\mathrm{CN}$ dan $(m,-m) \in M$. dimana,

$$j = x+\alpha \tag{9}$$

$$r = \alpha - x \tag{10}$$

dan

$$m = x' + \alpha' \tag{11}$$

$$-m = \alpha' - x' \tag{12}$$

Perhatikan bahwa,

$$(j,r) \odot (m,-m) = \left(\frac{j\cdot m + r\cdot(-m)}{2}, \frac{j\cdot(-m) + m\cdot r}{2}\right)$$

Selanjutnya, dengan mengeliminasi persamaan (11) dan (12) diperoleh $\alpha'=0$ dan $x'=m$, sehingga berlaku:

$$\begin{aligned}\frac{j\cdot m + r\cdot(-m)}{2} &= \frac{(x+\alpha)\cdot x' + (\alpha-x)(-x')}{2}\\ &= \frac{2(xx')}{2}\\ &= xx' \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{j\cdot(-m) + m\cdot r}{2} &= \frac{(x+\alpha)\cdot(-x') + x'\cdot(\alpha-x)}{2}\\ &= \frac{-2(xx')}{2}\\ &= -(xx') \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

Jelas $xx' \in \mathbb{Z}$, sehingga dapat disimpulkan $(j,r) \odot (m,-m) \subseteq M$ atau dengan kata lain M merupakan *Ideal* kiri dari $\mathrm{JR}-2\mathrm{CN}$.

Selanjutnya, akan ditunjukkan *Ideal* kanan dari $\mathrm{JR}-2\mathrm{CN}$ atau $(m,-m)\odot(j,r) \subseteq M$. Perhatikan bahwa,

$$(m,-m)\odot(j,r)=\left(\frac{m\cdot j+(-m)\cdot r}{2},\frac{m\cdot r+j\cdot(-m)}{2}\right)$$

Dengan menggunakan persamaan (9) dan (10) untuk (j,r) dan untuk $(m,-m)$ menggunakan persamaan (11) dan (12) diperoleh $\alpha'=0$ dan $x'=m$. sehingga,

$$\begin{aligned}\frac{m\cdot j+(-m)\cdot r}{2} &= \frac{x'\cdot(x+\alpha)+(-x')(\alpha-x)}{2}\\ &= \frac{2x'x}{2}\\ &= x'x \ \in \mathbb{Z}\\ \frac{m\cdot r+j\cdot(-m)}{2} &= \frac{x'\cdot(\alpha-x)+(x+\alpha)\cdot(-x')}{2}\\ &= \frac{-2(x'x)}{2}\\ &= -(x'x)\in\mathbb{Z}\end{aligned}$$

Jelas $x,x' \in \mathbb{Z}$ sehingga dapat diklaim $(m,-m)\odot(j,r)\subseteq M$ atau dengan kata lain *Subring* M merupakan *Ideal* kanan dari $\mathrm{JR}-2\mathrm{CN}$. Jadi, disini telah dibuktikan bahwa M adalah *Ideal* dari $\mathrm{JR}-2\mathrm{CN}$.

Contoh *Ideal* pada $\mathrm{JR}-3\mathrm{CN}$ yaitu,

Preposisi 6

Subring $(S,\oplus_{\mathrm{JR-3CN}},\odot_{\mathrm{JR-3CN}})$ dengan $S=\{(-s,s)_0 \in \mathrm{JR}-3\mathrm{CN} : \forall s \in \mathbb{Z}\}$

Bukti

Akan ditunjukkan *Subring* *S* adalah *Ideal* dari $\mathrm{JR}-3\mathrm{CN}$.

Misalkan, $(j,r)_\alpha \in R$ dan $(-s,s)_0 \in S$. dimana, $j=\alpha-r$ dan $s=\alpha'-r'$, $s=r'$ dan $\alpha'=0$. perhatikan bahwa,

$$\begin{aligned}(j,r)_\alpha \odot (-s,s)_0 &= (j\cdot(-s)+j\cdot s+(-s)\cdot r, r\cdot s)_{\alpha\cdot 0}\\ &= ((-s)\cdot r, r\cdot s)_0\end{aligned}$$

Sehingga berlaku, $(-s)\cdot r=(-r')\cdot r=-(r'\cdot r)\in\mathbb{Z}$ dan $r\cdot s=r\cdot r' \in \mathbb{Z}$. Karena, $r.r' \in \mathbb{Z}$, maka $(j,r)_\alpha \odot (-s,s)_0 \subseteq S$, sehingga jelas *S* merupakan *Ideal* kiri dari $\mathrm{JR}-3\mathrm{CN}$.

Selanjutnya , dengan cara yang sama akan dibuktikan *Ideal* kanan dari $\mathrm{JR}-3\mathrm{CN}$ yaitu akan ditunjukkan $(-s,s)_0\odot(j,r)_\alpha\subseteq S$. Perhatikan,

$$\begin{aligned}(-s,s)_0\odot(j,r)_\alpha &= (-s\cdot j+s\cdot j+r\cdot(-s), s\cdot r)_{0\cdot\alpha}\\ &= (r\cdot(-s),\ s\cdot r)_0\end{aligned}$$

dimana, $r\cdot(-s)=r\cdot(-r')=-(r\cdot r')\in\mathbb{Z}$ dan $s\cdot r=r'\cdot r \in\mathbb{Z}$.

Sehingga, dapat dikatakan $(-s,s)_0\odot(j,r)_\alpha\subseteq S$ merupakan *Ideal* kanan dari $\mathrm{JR}-3\mathrm{CN}$. Jadi, terbukti S adalah *Ideal* dari $\mathrm{JR}-3\mathrm{CN}$.

7. Kesimpulan

Berdasarkan penelitian serta studi literatur yang telah dilakukan tentang *Ring* $\mathrm{JR}-2\mathrm{CN}$ dan $\mathrm{JR}-3\mathrm{CN}$, dapat ditarik beberapa kesimpulan sebagai berikut :

1. Contoh *Subring* pada $\mathrm{JR}-2\mathrm{CN}$ dan $\mathrm{JR}-3\mathrm{CN}$:
   - $K=\{(j,j)\in\mathrm{JR}-2\mathrm{CN},\forall j\in\mathbb{Z}\}$
   - $M=\{(j,-j)\in\mathrm{JR}-2\mathrm{CN},\forall j\in\mathbb{Z}\}$
   - $S=\{(-r,r)_0\in\mathrm{JR}-3\mathrm{CN},\forall r\in\mathbb{Z}\}$

2. Contoh *Ideal* pada $\mathrm{JR}-2\mathrm{CN}$ dan $\mathrm{JR}-3\mathrm{CN}$:
   - $K=\{(k,k)\in \mathrm{JR}-2\mathrm{CN}, \forall\, k\in\mathbb{Z}\}$
   - $M=\{(m,m)\in \mathrm{JR}-2\mathrm{CN}, \forall\, m\in\mathbb{Z}\}$
   - $S=\{(s,s)_0\in \mathrm{JR}-3\mathrm{CN}, \forall\, s\in\mathbb{Z}\}$

8. Daftar pustaka

[1] Alfaris, R., and H. Kamarulhaili. 2011. Two New Abelian Groups Based On $\mathrm{JR}-2\mathrm{CN}$ dan $\mathrm{JR}-3\mathrm{CN}$. *Aust. J. Basic & Appl. Sci.* **5(11):** 2272-2281.

[2] Alfaris, R., and H. Kamarullhaili. 2011. Two New Rings and Field Based On $\mathrm{JR}-2\mathrm{CN}$ and $\mathrm{JR}-3\mathrm{CN}$. diseminarkan ICREAM5 ITB; Bandung, 22 Oktober 2011. Hlm 38-39.

[3] Prihandoko, A. 2009. Pengantar Teori Ring dan Implementasinya. Universitas Jember.

[4] Alfaris, R., and H. Kamarulhaili. 2010. Two New Formulas for Generating Infinite Sets of Integer Numbers as a Sum of Two and Three Signed Cubic Numbers. *Journal of Mathematics and Statistic.* **6(4):** 462-467.